# Problém tří těles

**– komentované praktikum**

**Jan Kadrnoška**

**Themis**

Vydalo sdružení pro teoretickou fyziku
THEMIS, 28. října 563, Turnov, CZ
www.themis.cz/young
young@themis.cz
2017
První vydání

ISBN 978-80-270-0991-6

## Úvodem

Ve vánočním týdnu v roce 1968 zaparkovala na těsné oběžné dráze kolem Měsíce výprava Apollo 8 se třemi muži posádky. Cesta k Měsíci jim trvala asi 2 a půl dne a po 10 obletech Měsíce se od něj zase odpoutali a vrátili se domů. Při příletu i odletu museli nad odvrácenou stranou Měsíce zažehnout hlavní motor lodi podle mimořádně přesných pokynů poslaných chvíli předem z řídícího výpočetního střediska na Zemi. Sami bez něj by mohli svůj stroj řídit jen v nouzi a s velkým rizikem. Při malé chybě by jim hrozilo nebezpečí, že narazí do Měsíce nebo od něj odletí bez naděje na návrat. Manévr museli provést už bez kontaktu se Zemí ručně sami, nesměli ani trochu zaváhat. Byly to jedny z nejnapínavějších okamžiků v historii lidí. Úspěch závisel nejen na spolehlivosti palubních přístrojů a pohotovosti a chladném rozumu těch tří mužů, ale neméně na jistotě těch, kteří manévr a budoucí dráhu spočítali.

Sledoval jsem s napětím celé dobrodružství tak jako miliony lidí po celém světě a v duchu se rozhodoval, jestli mám víc obdivovat ty muže na palubě lodi nebo ty, co mají v řídícím středisku za všechno odpovědnost a s pevnými nervy řeší každou nenadálou situaci. Jenomže jsem chodil tenkrát teprve do sedmé třídy základní školy a moje znalosti stačily jen na snění. Brzy na gymnáziu jsem se už ale mohl pustit do prvních výpočtů a to překvapivě jen s běžnými středoškolskými znalostmi. Potřeboval bych býval tehdy nějakou knížku, která by mě trochu vedla v bludišti mezi odbornými učebnicemi, kterým jsem sotva rozuměl a planými populárními články, kterým asi nerozuměli ani jejich autoři.

Dnes, kdy už uplynulo od projektu Apollo 50 let, mě překvapilo, jak je zájem o tuto „dávnou“ historii a vůbec o meziplanetární lety stále živý. Nedávné přednášky Charlese Duka (10. muže na Měsíci) v Praze byly zaplněny do posledního místa. Když jsem o tom pak mluvil s několika středoškoláky, viděl jsem, že by potřebovali právě takovou knížku, kterou jsem sám v jejich věku hledal. Zaujal mne i jejich nepředstíraný údiv, když jsem jim ukázal, jak „snadno“ lze hýbat kosmickými tělesy na počítači. Takže jsem částečně uspořádal svoje počítačové programy na toto téma a připravil „počítačovou hračku“, která dovolí mladším zájemcům o astronomii pohrát si s planetárními pohyby a umožní jim také případně trochu uplatnit svoji invenci. Program se jmenuje YOUNG a jeho jádro jsem vyjmul ze svých raných programů pro simulaci akrečních disků ve dvojhvězdách. Původní název jsem z vlastních historických důvodů ponechal: John Young byl jedním z nejznámějších amerických astronautů, byl průkopníkem prvotního programu Gemini, jako 9. muž se procházel po Měsíci. Před tím byl v Apollu 10 prvním „osamělým“ člověkem u Měsíce, později ještě velitelem prvního letu raketoplánu. Program jsem si kdysi podle něj pojmenoval z obdivu k němu a snad také proto, že mám stejné křestní jméno.

Program i následující komentář k němu dávám z ruky s představou, že jej budou číst zejména gymnazisté s hlubším zájmem o astronomii, konkrétně o nebeskou mechaniku, jejímž ústředním tématem je právě problém tří těles. A kteří zároveň vědí, že k tomu je potřeba pěstovat hlavně matematiku a možná pomýšlejí na další studium fyziky. Snažil jsem se udržet matematickou stránku v mezích střední školy, čili na počátku infinitesimálního počtu. Ne všechny termíny jsou dopodrobna vysvětleny, ale jsou použity tak, aby byl snad jasný jejich smysl. Charakter textu je proto spíš inspirativní, volil jsem vlákno výkladu raději pevnější než rozvolněné, aby mohlo posloužit jako vodítko pro další studium. Kladl jsem důraz na historický kontext; mám za to, že matematické výsledky jsou bez znalosti souvislostí, doby ve které vznikly a životních osudů jejich autorů mnohem méně pochopitelné.

Důležitou součástí této publikace je počítačový program. Předpokládám, že pro čtenáře není problém si jej zkopírovat z mateřské stránky `www.themis.cz/young`. Pro aktivního zájemce může být program to hlavní a tato publikace jen skutečně komentářem k němu. Jelikož počítačová data a výstupy z programu jsou součástí tohoto textu, porušil jsem některé zásady české typografie matematických výrazů; např. psaní desetinné čárky jsem nahradil tečkou, jak to vyžaduje počítačová syntaxe. Jednotu považuji v tomto případě za užitečnější než úřední pravidla, jakkoli tradiční.

Jsem si vědom toho, že následující text čtenáře spíš provokuje k pochybnostem, než aby mu posloužil okamžitě přijatelným pohledem na problém. Je to mým záměrem a případnou kritiku si sám zodpovím. Nicméně bych chtěl už zde poděkovat svým dvěma astronomickým kolegům a přátelům – RNDr. Václavu Hníkovi, CSc. a prof. Vladimíru Kafkovi – s kterými jsem konzultoval některé otázky a hned se první kritiky dočkal. Řada jejich připomínek mi velmi pomohla některé formulace přehledněji vysvětlit.

J.K., 31. srpna 2016

# Obsah

## 1. Problém tří

Problém tří těles přišel do novodobé fyziky v podstatě z antiky, z prostředí raných pythagorejců přibližně v 6. století př.Kr. Byla to mocná a později nesmírně vlivná filosofická škola usazená v jihoitalském Krotónu. Ústředním motivem jejich učení byl pojem *harmonie*. Dnes si harmonii sice spojujeme obvykle s hudební naukou, ale jejich původní koncepce měla mnohem širší význam. Harmonií nazývali obecně to, co spojuje nějaké protiklady. Protiklady ne nutně ve smyslu nějakého ostrého kontrastu nebo protipólu, ale ve smyslu něčeho odlišného, nestejného. Harmonie je jistý druh spojení potřebný k tomu, aby věci obecně nepodobné měly k sobě určitý vztah a v něm mohly spolu tvořit řád uspořádaného světa. Celek, kosmos nebo příroda je spojením nějakých základních prvků, ale toto spojení není dáno výlučně tím, že by jeden typ činitelů působil na druhý. Je to harmonie, která překonává rozdíly v protikladech a která ustanoví nebo ukáže jejich hlubší jednotu.

Pro pythagorejskou školu je typické, že všemu o čem přemýšlí, snaží se přiřadit nějaké číslo. Základní podobou harmonie je tedy vztah mezi dvěma čísly. Matematicky vyjádřeno je to jejich poměr – zlomek – tedy nějaké další číslo. Chceme-li z hlediska harmonie pochopit nějaký vztah mezi dvěma čísly, musíme vzít do úvahy nezbytně ještě číslo třetí.

Pythagoras tím nabízí velmi přirozený pohled na svět a určitě ho můžeme přijmout i tehdy, když nechceme nutně přemýšlet o číslech, ale díváme se na obyčejné věci kolem nás. Chceme-li například o něčem prohlásit, že je to velké nebo malé, nemůžeme to udělat jinak, než že to nějakým způsobem poměříme (tedy stanovíme poměr). Harmonie je v tomto případě vztah mezi malým, velkým a námi samotnými, kteří hledaný rozdíl pociťují a chtějí ho popsat. Aby tento vztah nabyl nějakého smyslu, musíme být tři. Žádný chlapec asi nemůže prohlásit o dívce, která se mu líbí, jak je hezká dříve, než ji porovná s nějakou jinou. Kdyby dvě dívky stály vedle sebe a nebyl by nikdo, kdo je porovnává, nebylo by o žádné z nich možno říci, že je hezčí. Opět tedy musí být alespoň tři. Od pythagorejců tak pochází zejména poučení o významu trojky oproti jedničce nebo dvojce.

Naše téma je ovšem astronomické a zaměříme proto svoji pozornost na nebeská tělesa a jejich pohyby. Mezi nimi jsou patrně také nějaké vztahy nebo harmonie a jejich hledáním se dostaneme ke kořeni problému tří těles. Ukazuje se, že pravidla pohybů pozorovaných na obloze mají platnost i pro tělesa na Zemi, jichž se každodenně dotýkáme. Přesná podoba problému pochází od Isaaca Newtona (publikovaná 1687) a je víceméně čistě matematická, ovšem inspirovaná téměř výlučně fyzikálními souvislostmi. Zdá se, že patří také do kategorie slavných aporií, jako je závod Achillea s želvou, zdvojení krychle, indexace prvočísel, pythagorejské komma, součty divergujících řad apod., tedy do úloh, kde tvrzení k nim jsou *velice citlivá na správnou formulaci problému.*

Konkrétní formulace problému tří těles pocházela ze zkušenosti s pozorováním pohybů planet na obloze a případném odhalení jejich vlivu na pozemské události, které se dějí takříkajíc v „lidském“ měřítku. Důvěra, že takový vliv skutečně planety mají, vedla k úsilí o nalezení mechanismu a pravidel, jakými na sebe tato tělesa působí. Schopnost věcí nebo těles na sebe působit a ovlivňovat se je obvykle přisuzována nějaké jejich vnitřní moci, která z nich vyvěrá nebo vyzařuje. V latinských textech se označuje jako *vis* – tedy síla – a fyzikální pojem síly byl později zaveden právě v této spojitosti.

Ve fyzikálních teoriích o vzájemném vztahu těles se předpokládá, že na sebe působí jistou silou, která přivodí jejich vzájemný pohyb. Tím se míní nějaká měřitelná změna místa nebo polohy, v případě těles bychom si měli představovat změny jejich vzdáleností. Zdá se, že k nalezení velikosti nebo vlastností takové síly může vést analýza pohybu **dvou** těles. Je to nejjednodušší uspořádání, jaké si umíme představit; systém obsahující více těles bychom asi intuitivně považovali za složitější. Provedení analýzy je ovšem velmi citlivé na to, jaké nástroje si k ní dopřejeme. Měříme-li kupříkladu právě vzdálenost, můžeme se spokojit opravdu jen s „ryzí“, s ničím nesouvisející, vzdáleností mezi oběma tělesy; to tehdy, když jsme s jedním tělesem nedílně spojeni nebo jsme tím tělesem my sami. Nebo můžeme jejich vzdálenost pozorovat a měřit z nějakého nezávislého místa mimo ně. V obou případech naměříme rozdílné výsledky. Třeba vzdálenost dvou planet obíhajících kolem společného těžiště po kruhových drahách je evidentně stále stejná. V prvním případě vůbec nejsme schopni rozeznat jestli se pohybují, případně spekulovat o velikosti jejich úhlové rychlosti, protože žádné úhly nemůžeme měřit. V druhém případě si naopak jejich kruhového pohybu pohodlně všimneme, protože máme k dispozici i jejich vzdálenosti vůči pozorovateli, a ty se mění. Role toho „třetího“ (ať už je to třeba nepatrné těleso nebo jenom pozorovatel) je klíčová, protože se tělesa kvůli němu pohybují jinak. Tak to skutečně je, i když se nám nechce připustit, že rozdíl je důsledkem existence dalšího tělesa nebo dokonce nastane pouze proto, že pohyb někdo pozoruje.

Je vidět, že analýza pohybu dvou těles musí překonávat záludné překážky a rozeznat, co je podstatou jejich výlučně vzájemného vztahu, vyžaduje značné opatrnosti. Také pečlivé důslednosti, protože v druhém případě – přísně vzato – už se nejedná o analýzu pohybu dvou těles.

Studium pohybů pozemských těles ve vztahu k samotné Zemi a jejich zobecnění na pohyby Měsíce a planet bylo nicméně korunováno slavným výsledkem, dnes všeobecně známým gravitačním zákonem. Jinak také nazývaným zákonem všeobecné přitažlivosti, protože tíže (*gravitās*) je projevem univerzální vrozené vlastnosti těles se přitahovat. Zákon tvrdí, že velikost oné přitažlivé síly je nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti dvou přitahujících se těles. (Rozumí se vzdálenosti mezi nimi, změřené v nějakých jednotkách, třeba v metrech, a umocněné na druhou. Mluvíme jen o úměře, čili na volbě jednotek nezáleží.) Tato domněnka se diskutovala na konci 17. století zejména v anglických universitních kruzích a svými originálními výpočty ji podepřel právě Newton. Zákon v podstatě vyslovil jako „nadřazené" pravidlo, podle kterého se tělesa budou pohybovat. A dodnes se většinou takto chápe. Použití gravitačního zákona zpětně na výpočet pohybu dvou těles vede k přímému a jednoznačnému určení dráhy (elipsy nebo jiné kuželosečky). Pohyb takového jednoduchého systému můžeme vypozorovat např. ve sluneční soustavě a s výpočtem najdeme uspokojivou shodu. Pochopitelně to tak být **musí**, protože z měření právě takových (téměř přesně eliptických) pohybů byl zákon nalezen a je tedy jejich důsledkem. Takto vyslovený gravitační zákon by nám ale byl k ničemu; jen jinými slovy by vyjadřoval to, co bylo dávno vysloveno o planetárních elipsách.

Abychom ověřili jeho skutečnou sílu, měli bychom ho použít na nějaký „složitější", ale stále ještě pokud možno jednoduchý systém těles. Přirozeně si tak položíme otázku, jak se budou pohybovat ne dvě, ale **tři** tělesa, působící na sebe navzájem ve dvojicích onou přitažlivou silou úměrnou jejich (stejně tak ve dvojicích vzájemné) vzdálenosti. Tuto otázku si položil už Newton, nedokázal na ni odpovědět a k všeobecnému překvapení na ni neodpověděl zatím nikdo. A to je právě ten problém – jak vypočítat pohyb tří těles působících na sebe nějakou vzájemnou silou, tedy **Problém tří těles**.

## 2. Historie problému

Nikdy nemůžeme realizovat experiment, kdy se budou právě tři tělesa pohybovat v jinak prázdném prostoru. I tak ale věříme, že by se taková tělesa pohybovala a že by k tomu nepotřebovala nějaká další tělesa, byť třeba velmi vzdálená. Těch je v reálném vesmíru samozřejmě velmi mnoho. To, že se tři tělesa nějak pohybují, jednoduše znamená, že problém tří těles musí mít nějaké řešení. Když říkáme, že toto řešení neznáme, máme na mysli, že neznáme tzv. *analytické řešení*. Analytické řešení by byl nějaký matematický vzorec resp. funkce, která obsahuje kromě jiných proměnných nebo konstant zejména *čas*, to jest proměnnou, za niž je možno dosadit jakékoliv číslo, i záporné a libovolně veliké. Tedy vzorec, který jediným výpočtem přesně určí, jaké budou všechny tři vzdálenosti mezi tělesy v libovolné chvíli – za vteřinu, za tisíc vteřin, před nebo za milion let. Znamenalo by to dokonalé předpovídání budoucnosti nebo rozkrytí minulosti. Obecně takový vzorec nemáme, ale pokud věříme v matematický popis přírody, existovat musí a stojí za to hledat ho. Že se o to snažilo mnoho chytrých a vynalézavých lidí a neuspělo, ukazuje na závažnost problému. Jak jsme již řekli, můžeme očekávat, že jeho řešení bude citlivé na správnou formulaci.

Vydáme-li se po stopách problému zpět do historie, v níž byl zformulován, najdeme jako opěrné body zejména 4 knihy, které ovlivnily problém tří těles více než cokoliv jiného. Jsou to (podle stáří): Ptolemaiův Almagest (cca 150 AD), Keplerova Astronomia Nova (1609), Newtonova Principia (1687) a Machova Mechanika (1883). Českému čtenáři těchto knih jistě neunikne, že druhé a čtvrté dílo bylo napsáno v Praze. Je nutno poznamenat, že k tématu všeobecně existují tisíce článků, knih nebo pojednání. Krátce se nyní dotkneme základních předpokladů problému, které ve zmíněných 4 knihách vedou k originálním a klíčovým obratům v pohledu na věc.

---

• Nejméně převratný, ale o to více vlivný, zdá se být Almagest, jinak nazývaný též *Megalé Syntaxis*, což, jak z názvu vyplývá, je velký souhrn či spíše přehled antických astronomických znalostí a technik. Namísto něj bychom měli spíše zmiňovat starší řecké autory, z nichž Almagest ponejvíc čerpá, tj. zejména Apollónia a Hipparcha. Jejich vlastní díla se ovšem zachovala jen v menších zlomcích a Ptolemaios tak zastal úlohu jejich tlumočníka pro pozdější evropskou astronomii. V knize jsou podrobně popsány matematické metody měření úhlů, sférické trigonometrie a celá řada naměřených pohybů planet. Dopodrobna se rozebírá Apollóniův model epicykl/deferent, čili rozklad na pohyby po kružnicích. Protože rozklad provázely značné pochybnosti, doplňuje Ptolemaios pro částečné vylepšení předpovědí svůj vlastní příspěvek, tzv. *equant*.

Jako červená nit se touto starověkou knihou ale vine hlavní potíž: všechna měření a výpočty se odehrávají na dvourozměrném nebeském glóbu, jak ho my pozemšťané pozorujeme. Problém je v tom, že skutečný pohyb probíhá v prostoru třírozměrném. Potřebný třetí údaj, tedy vzdálenost těles, je pro antická pozorování a měření nedostupný. Autorům je zřejmé, že nutně hraje v jejich výpočtech roli, ale protože ho není jak podchytit, probíhají výpočty jaksi naslepo. Všude pociťujeme úsilí, jak se něco dozvědět o vzdálenostech alespoň nepřímo z viditelné paralaxy (= viditelného úhlového rozměru) Měsíce a Slunce a to ještě s přídavkem značně nejistých předpokladů. V pozdějším svém díle (*Planetární hypotézy*) dokonce Ptolemaios podlehl svodům toužebných přání a publikoval tabulku vzdáleností planet od Země. Argumenty, na nichž jeho čísla stojí, jsou ale nepřesvědčivé a jejich hodnota je poměrně slabá.

Důležitost Almagestu pro nás spočívá ale v něčem jiném. Dočítáme se zde zejména o tzv. *druhé anomálii.* To je smyčka v roční dráze planety, nakreslené na hvězdné mapě. Jev, který je dostupný dnes, stejně jako před dvěma tisíci lety, každému pečlivějšímu amatérskému astronomovi. V případě Marsu, Jupiteru a Saturnu je její vykreslení příjemným a jednoduchým úkolem školního astronomického kroužku. V případě Venuše a Merkuru je to trochu obtížnější, v případě Slunce a Měsíce by její hledání vyžadovalo velké úsilí.

Antická astronomická obec věděla, že Slunce nevykazuje žádnou druhou anomálii a pohyb Měsíce je do té míry „nepravidelný“, že se o smyčce nedá mluvit. Bylo zřejmé, že druhá anomálie se Sluncem nějak souvisí nebo že Slunce je dokonce její příčinou. Tady bychom snad poprvé mohli rozpoznat názor, že nějaké těleso konkrétně ovlivňuje jiné velmi vzdálené těleso, aniž by se jedno druhého dotýkalo. Tento názor **není** samozřejmý a v minulosti ho většina filosofů odmítala přijmout.

• Antická astronomie upadala v zapomnění současně s úpadkem středomořských kultur a její torzo se zachovalo převážně díky rozkvětu arabského vlivu v 9. století v Orientu. Arabové sami k převzatým znalostem mnoho nepřidali, až všeobecná renesance v Evropě přinesla revizi a další pokrok i v astronomii. Tak se dostaly antické výsledky až k rukám Keplerovým, a to převážně z prostředí vzmáhající se komunity čtenářů Koperníka.

Keplerova doba byla zaujata otázkou, na jakém principu měřit kosmické vzdálenosti. Koperník vytknul do popředí **význam modelu** pro jejich určování. Ukázal poměrně srozumitelně, že změny vzdáleností planet „dovozované“ (v žádném případě ne měřené!) mezi planetou a pozorovatelem na Zemi jsou komplikovanější a obtížněji uchopitelné než (zase jen spekulativní) vzdálenosti mezi planetou a Sluncem. Jeho pohled tedy zdůrazňoval vliv Slunce a hledalo se zdůvodnění, co je podstatou tak mocného slunečního účinku. (O velikosti resp. hmotnosti nevěděl nikdo nic a sotva bylo možné o ní vážně diskutovat.) Na to ještě Kepler sice neodpověděl, ale předložil věrohodný model eliptických drah planet se Sluncem ve společném ohnisku.

(Poznamenejme, že ohniskovým vlastnostem kuželoseček byla v antice věnována jen okrajová pozornost a teprve Kepler (1604) zavádí pojmenování „ohnisko" (focus). To patrně udělal v duchu pythagorejských tradic, které předpokládaly existenci středu světa a do něj umístily oheň, ztotožňovaný se symbolem nehybnosti a stálosti, zbožštělým jako *Hestia*. Hestia jako bohyně domácího ohniště, pevného bodu, který svou panenskou čistotou a trvalostí v prostoru odolá čemukoliv; spolu s protikladným Hermem má ještě hlubší význam jak v pythagorejské mystice, tak v řeckém myšlení vůbec.)

Co se týče přesnosti úhlových poloh planet, byl model ve srovnání s různě „záplatovaným" kruhovým rozkladem naprosto bezkonkurenční. Vzdálenosti planet od Slunce potom vyšly jaksi automaticky jako parametry modelu. Když Kepler zjistil, že takto vypočítané vzdálenosti velmi přesně splňují jednoduché relace jeho vlastního 2. a 3. zákona, mohl si dovolit svoje domněnky prohlásit téměř za jistoty. Vyvracet model praktickými prostředky bylo kvůli jeho přesnosti v podstatě marné a dnešní měření vzdáleností (radarovým odrazem) ho definitivně potvrzují. Kepler sám svými objevy mimo jiné otevřel cestu ke zkoumání problému tří těles; v něm jsou změny vzdáleností samozřejmě ústřední otázkou.

• V roce 1610 publikoval Galileo Galilei objev 4 Jupiterových měsíců. V problému tří těles znamená tento nález zásadní přelom. Už nebylo pochyb, že nejen Slunce může ovlivňovat pohyb planet podobně jako Země ovlivňuje Měsíc, ale že tuto vlastnost lze najít u každé planety nebo tělesa. Kepler hned v prvním návalu euforie nad novým objevem předpovídal další měsíce Marsu a Saturnu. Po krátkém čase bylo zřejmé, že Jupiter je nadán schopností přitahovat jiná tělesa, stejně jako třeba Země nebo Slunce. Otázkou bylo, proč si 4 měsíce vybraly právě Jupiter, kolem něhož budou obíhat, a ne třeba Slunce, nebo proč neobíhají jeden kolem druhého, atd. Vliv „centrálního" tělesa bylo tedy třeba nějak kvantifikovat – některá tělesa se zdála být silnější a tak vznikl pojem síly.

Tak jako si Kepler všiml (1619), že poměr třetích mocnin středních vzdáleností planet od Slunce a druhých mocnin jejich siderických oběžných dob je konstantní (zde se střední vzdáleností míní průměr mezi nejmenší a největší hodnotou, tedy se rovná velké poloose elipsy), přesvědčili se podobně jeho následovníci, vybavení ovšem lepší optikou, že totéž platí i pro Jupiterovy měsíce. Konstanta je u Jupiteru ale jiná, asi 1000x menší.

Newton v prvním vydání svých Principií porovnává obě konstanty zlomkem 1:1100, o 40 let později ve třetím vydání ho opravuje na 1:1067, dnes je uznávaná hodnota 1:1047. Může se o tom přesvědčit každý středoškolák během několika minut, když si přečte oběžné doby a vzdálenosti satelitů v nějakých tabulkách. Několik týdnů pozorování Jupiteru každou noc ale přivede i dnešního astronomického amatéra k dobrým číslům a výsledek ho určitě zahřeje a za námahu stojí.

Pro spravedlnost je nutno poznamenat, že Kepler svůj 3. zákon našel ve vlastních číslech, která v podstatě uhodl, zatímco u Jupiteru byl tentýž zákon prokázán přímo z naměřených hodnot!

Newton přišel s názorem, že ve stejném poměru je i schopnost Slunce a Jupiteru přitahovat nějaká menší tělesa. Takovou schopností je podle něj nadáno každé těleso které má nějakou *hmotnost*, tedy vlastnost, která mu je dána do vínku bez ohledu na cokoliv „vnějšího“. Tento ničím nepodložený předpoklad (tedy že hmotnost je „vnitřní“ neměnná vlastnost tělesa) uvedl hned jako 1. větu svých slavných Principií a okamžitě sklidil bouřlivou vlnu kritického nesouhlasu. Je pravdou, že jedním z objektivních kritiků byl i on sám. Také je pravdou, že fyzika postavená na tomto předpokladu skvěle fungovala a 200 let se nenašel nikdo, kdo by kritický pohled nějak zúročil.

Newtonův odhad, že Jupiter je přibližně 1000x méně hmotný než Slunce, nebyl jeho hlavním přínosem. V době vydání Principií svou domněnku asi neměl čím prokázat. Na druhé straně ovšem v kontextu problému tří těles hraje toto číslo klíčovou úlohu a k řešení ho nutně potřebujeme.

Skutečný produktivní přínos představují jeho tři „pohybové zákony“, notoricky opakované už na středních školách a známé i studentům humanitních oborů. Pozoruhodné a zčásti paradoxní je zejména to, že všechny tři výroky sám autor nazývá zákony (*lex*) a jako zákony jsou uváděné v učebnicích. Ve skutečnosti jsou to ale definice. (Musíme vzít v úvahu překladatelské jemnosti: rozdíl obou slov zákon/definice patrně dnes chápeme trochu jinak než před 300 lety.)

1. zákon v zásadě definuje tzv. *inerciální soustavu* (*inertia* = setrvačnost). Je to soustava (souřadnic), v níž se každé těleso pohybuje rovnoměrně přímočaře, pokud na něj nepůsobí žádná síla. Zákon má formální charakter a odkazuje na vztah k něčemu základnímu a neměnnému, podobně jako u Aristotela nebo Pythagory. Často se také místo o inerciální soustavě mluví o absolutním prostoru. Pohyb musí být vždy k něčemu vztažen, takže inerciální soustava a její definice je v tomto pojetí nezbytná.

Nás zajímá především 2. zákon. Říká, že síla je součinem hmotnosti a zrychlení, jež je projevem té síly. Co je hmotnost (resp. jak se má měřit) říká 3. zákon, co je zrychlení je zřejmé, ale nevíme, co je to síla. Proto je 2. zákon ve skutečnosti definicí síly a návodem, jak ji změřit. Opravdovým zákonem je až tvrzení, že síla je veličina, kterou lze sčítat – a je to zároveň kardinální výrok pro problém tří těles. Newton ho v Principiích řadí hned těsně za své 3 „zákony“ a je to zásadní *Věta o Parallelogramu* (*parallelogram* = rovnoběžník).

Přeložena do běžné řeči říká asi toto: nechť známe pohyb tělesa pod vlivem nějaké (první) síly a rovněž známe jiný jeho pohyb pod vlivem jiné (druhé) síly. Jaký bude pohyb, když budou obě síly působit současně? – Rozhodně není správné oba pohyby (tedy známé dráhy tělesa) jednoduše sečíst. Musíme (podle Věty o Parallelogramu) sečíst obě síly a tím se dozvíme společnou výslednou sílu, která (podle 2. „zákona“) způsobí zrychlení a z něj teprve musíme (pracně) skutečný pohyb vypočítat.

Jak to přesně souvisí s problémem tří těles? – Chceme-li se dozvědět, jak se bude pohybovat jedno ze tří těles (třeba třetí), musíme vyjít z toho, že jeho pohyb budou ovlivňovat 2 síly – přitažlivá síla prvního tělesa (výsledkem jejího samostatného působení by byla dejme tomu elipsa) a přitažlivá síla druhého tělesa (samostatným výsledkem by byla třeba rovněž elipsa, jen jinak veliká a jinak orientovaná, protože přitahující těleso je jinde a obecně má jinou hmotnost). Kdybychom obě elipsy jednoduše (vektorově) sečetli, dostaneme výsledek, který neodpovídá skutečnosti. Správný postup je ten, že nejprve zjistíme první a druhou sílu, obě (vektorově) sečteme, dostaneme celkovou sílu, ta určuje zrychlení třetího tělesa a teprve z něj se domůžeme vlastního pohybu, tedy reálné trajektorie.

Poslední krok je obtížný a ještě ho vysvětlíme dále. Celou tuto koncepci i s posledním krokem vymyslel Newton víceméně sám a zaslouženě je za to obdivován.

• Návštěvu knihovny ukončíme 4. citovanou knihou: mnohokrát publikovanou a populární *Mechanikou* rektora pražské university Ernsta Macha, rodáka z Chrlic u Brna. Jen za svého života se dočkal sedmi vydání německého originálu a četli ho všichni slavní revolucionáři fyziky na přelomu 19. a 20. století. Podtext názvu je *„pojednáno historicko kriticky“* a v knize je více otázek než odpovědí. Mach vždy chtěl, aby se fyzikální teorie opíraly na prvním místě o zkušenost a experiment spíše, než o nějaké abstraktní pojmy. Polemizuje zejména s Newtonem, jehož Principia nesou plný název *„Matematické principy přírodní filosofie“* ; v nich se naopak nějaký abstraktní ideál upřednostní a z jeho hlediska se potom zkušenost popisuje (podobně jako u Koperníka).

Mach se vrací například k oné první větě Principií, která tolik dráždila už některé Newtonovy současníky. Může mít nějaké těleso hmotnost (vyjádřenou nějakým číslem) skutečně „vrozenou", bez ohledu na cokoliv? Jak bychom takové číslo mohli změřit, kdyby to těleso bylo v celém vesmíru samotné nebo bychom neměli po ruce nějaká další tělesa, protože jsou třeba velmi vzdálená. Patrně nemáme po ruce ani žádný návod, jak ho změřit. Mach dovozuje, že hmotnost je číslo, které samo o sobě nedává smysl. Můžeme ho změřit jen když nějaká další tělesa po ruce máme – např. z pozorování jejich vzájemné akce a reakce. Ostatně tak to sám Newton doporučuje svým 3. zákonem! Jestli ovšem tato tělesa skutečně potřebujeme, nemůžeme tvrdit, že hmotnost je na nich nezávislá, ale naopak má smysl jen vzhledem k nim. Naměřené číslo tedy není absolutní, je relativní (vztažené) k těm ostatním tělesům.

To ale není všechno. Pozorujte 2 tělesa o hmotnostech $m_1, m_2$ při elastické srážce. V inerciální soustavě (na pozadí souřadnic, kde platí 1, Newtonův zákon) si změříme jejich rychlosti před nárazem $u_1, u_2$ a po nárazu $v_1, v_2$. Zákon akce a reakce říká, že celková hybnost těles se nezmění, tedy $m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$ a odsud triviálně spočítáme poměr $m_1/m_2$. Ten samý poměr musí vyjít i ze zachování energie $m_1u_1^2+m_2u_2^2 = m_1v_1^2+m_2v_2^2$, čili všechny 4 rychlosti nemohou být libovolné, ale pro dané hmotnosti musí splňovat obě tyto vazby. Totéž platí nejen pro elastickou srážku, ale obecně pro jakoukoliv reakci na nějakou akci, tedy třeba pro pohyb pod vlivem gravitace. To je už z názoru zřejmé a potud je všechno v pořádku. Co se ale stane, když inerciální soustavu nemáme o co opřít? Kdyby ve vesmíru byla pouze ta dvě tělesa, jejichž hmotnosti chceme změřit, žádnou soustavu nikde nemáme a můžeme měřit jen *vzájemnou* rychlost před a po reakci. To je zjevně málo k tomu, abychom mohli hmotnosti vypočítat. Čili ani 2 tělesa nestačí k tomu, abychom mohli o hmotnostech vůbec mluvit. Musíme mít tedy tělesa alespoň 3, vzhledem ke třetímu můžeme už rychlosti obou zbývajících měřit a jejich hmotnost je tedy závislá na přítomnosti toho třetího. Měření, zdá se, na hmotnosti třetího tělesa není závislé. Jenže na začátku jsme si řekli, že všechna tělesa jsou nadána schopností na dálku (gravitačně) ovlivňovat jiná tělesa, takže bychom měli do měření započítat, že třetí těleso se s ostatními dvěma také přitahuje. Jak to máme ale udělat, když dopředu neznáme jejich hmotnosti (právě se totiž o nich chceme něco dozvědět)? A žádný jiný vzorec než zákon akce a reakce nemáme.

Otázky jsou sugestivně vyslovené a odpovědi na ně obtížné. Mach sám na ně neodpovídá, ale předkládá alespoň rámcový návrh, kudy vykročit. Naznačeným směrem ale dnes kupodivu kráčí jen málokdo. Machovy myšlenky, které v jeho době četli prakticky všichni později slavní fyzikové, se shodou okolností šířily zároveň s dobovým převratným poznatkem o konečné rychlosti světla. Z něj lze kromě jiného dovodit, že hmotnost tělesa není konstantní, ale závisí na jeho rychlosti vzhledem k pozorovateli. Tedy závěr dobře splňující obecné Machovy představy. Tak se zrodila speciální teorie relativity, určitě Machovou knihou inspirovaná. O několik let později spatřila světlo světa ještě obecná teorie relativity (té už se Mach nedožil), v originále opět postavená na tzv. Machově principu v souvislosti s otázkou setrvačnosti v prázdném prostoru.

Mach přijímal speciální teorii relativity rezervovaně a bránil se, když byl později spojován s jejím vznikem. Dá se říci, že koncepci relativnosti či relativity myslel trochu jinak než o něco mladší relativisté a určité rozpaky byly později pociťovány v obou táborech. Po Machovi ovšem zůstává jeho rozsáhlé fyzikální a filosofické dílo; bez ohledu na postuláty o rychlosti světla dává stále řadu inspirativních podnětů k tomu, jak přeformulovat problém tří těles, aby byla nějaká naděje na jeho řešení.

## 3. Několik poznámek k diferenciálním rovnicím

Nebeská mechanika nemá k řešení problému tří těles jiný instrument než gravitační zákon. Dříve než ukážeme, jak se s ním v praxi nakládá, vysvětlíme některé pojmy z matematického pozadí problému. V gravitačním zákonu se pracuje s pojmy jako síla a zrychlení. Zrychlením se myslí „okamžité zrychlení", t.j. změna rychlosti měřená v tak krátkém čase, jak jen to je možné. Představa nekonečně krátkého času nebo obecně nekonečně malé veličiny následně vede k pojmu diferenciálu a derivace. Rovnice v nichž se vyskytují diferenciály se nazývají diferenciální rovnice a jejich zkoumání je samo o sobě jedním z nejobsáhlejších oborů matematiky. Důkladný badatel by v něm mohl strávit několik životů. Uvedeme zde telegraficky a jen velmi zjednodušeně několik elementárních poznámek, abychom mohli ukázat, jak se dál promítnou do problému tří těles. Jeho řešení si dnes nikdo bez diferenciálních rovnic neumí představit.

Středoškolská matematika seznamuje studenty s pojmem *derivace* a dál budeme předpokládat, že čtenář umí alespoň technicky vypočítat derivace základních funkcí (cf. Dodatek č. 2). Obecně je derivace zobrazení funkce $\rightarrow$ funkce, tedy konkrétní předpis jak se z jedné funkce stane jiná funkce. Předpis je jednoduchý a jednoznačný; každá spojitá funkce má svoji (alespoň jednostrannou) derivaci. Derivace se pojí s konkrétní geometrickou představou, na níž byla ustavena – je to tangens tečny k dané křivce, která funkci znázorňuje. Za duchovního otce derivace je považován Isaac Barrow, profesor řečtiny a královský kaplan z Cambridge, učitel Newtonův; objev už ale v jeho době visel ve vzduchu (Barrow se narodil ve stejném roce, v němž zemřel Kepler, 1630). Od svého vzniku je pojem derivace spojený s pojmem rychlosti. Jestliže nějaká funkce $x$ zobrazuje polohu nějaké částice (tělesa) v čase $t$ jako $x = x(t)$, potom derivace této funkce podle času $\dot{x} = \dot{x}(t)$ je její *rychlost* (čili skutečně poměr [změna polohy]/[změna času]; jsou-li tyto změny velmi malé, dokonce menší než cokoliv představitelně malého, přechází poměr v derivaci). Tyto dva zápisy se čtou jako: „poloha částice $x$ je závislá na čase $t$" a „rychlost částice $\dot{x}$ je závislá na čase $t$". Tečkou nad funkcí se označuje její derivace podle času. Další derivace rychlosti $\ddot{x}(t)$, t.j. 2. derivace funkce polohy, se nazývá zrychlení, tedy je to [změna rychlosti]/[změna času].

Rychlost takto zavedl do fyziky právě Barrow; byl to on, kdo precizně definoval pojem času jako nezávislého lineárního matematického objektu, který plyne rovnoměrně jako číslo od $-\infty$ do $+\infty$. Řekové v antice chápali čas úplně a naprosto jinak a nové pojetí času znamenalo doslova dějinný obrat.

Diferenciální rovnice je rovnice, v níž neznámou není číslo, ale nějaká funkce; ta se v rovnici vyskytuje prostřednictvím alespoň jedné své derivace.

Elementárním příkladem budiž např. diferenciální rovnice $\dot{x} = t$. Hledáme neznámou funkci $x(t)$, která by rovnici splňovala. Je zřejmé, že je to funkce $x = \frac{1}{2}t^2$. Je nutno věnovat maximální pozornost důležitému faktu, že to není jediné řešení(**!!**), ale že obecným řešením je funkce $x = \frac{1}{2}t^2 + a$, kde $a$ je libovolná konstanta. Ve fyzice se takové konstantě (může jich být více) říká počáteční (někdy také okrajová) podmínka. Na počátku ($t = 0$) totiž v tomto příkladě platí, že $x(t = 0) \equiv x_0 = a$; tedy píšeme $x = \frac{1}{2}t^2 + x_0$.

Odtud je zřejmé, že zatímco derivování je jednoznačný proces, proces k němu „inverzní" (tedy hledání původní (tzv. primitivní) funkce z jejích derivací) vůbec jednoznačný **není**.

U složitějších rovnic můžeme někdy nalézt řešení, je ovšem třeba se často smířit s tím, že řešení se nepodaří nalézt i když rovnice vypadá na první pohled jednoduše. Pokud se v rovnici vyskytuje jen 1. derivace neznámé funkce, klasifikujeme ji jako rovnici 1. řádu, pokud se v ní vyskytují 2. derivace, je to rovnice 2. řádu atd. Řešením diferenciální rovnice je obecně nějaká funkce $x = x(t, x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, \ldots)$, kde $(x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, \ldots)$ jsou počáteční podmínky; jejich počet musí být stejný jako je řád rovnice. Jen výjimečně se podaří nalézt řešení v tomto tvaru, který se nazývá *obecným integrálem*. Pokud se vůbec podaří řešení nalézt, najdeme ho spíš ve tvaru tzv. *prvního integrálu* $C = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots)$, kde $C$ je konstanta. Náš triviální příklad rovnice $\dot{x} = t$ má první integrál jednoduše $C = x - \frac{1}{2}t^2$. Počet nezávislých prvních integrálů musí být samozřejmě zase stejný jako je řád rovnice. K úplnému řešení je potřebujeme znát všechny! To se nemusí vždycky podařit a tak je znalost alespoň některých z nich velmi cenná.

Kromě jedné diferenciální rovnice vstupují do hry soustavy diferenciálních rovnic, které mají více neznámých (přirozeně kolik neznámých funkcí, tolik je třeba rovnic). V našem textu vystačíme s funkcemi, které jsou závislé jen na jediné proměnné (času). Takovým rovnicím se říká obyčejné diferenciální rovnice; jestliže jsou neznámé funkce závislé na více proměnných, říká se jim parciální diferenciální rovnice (těmi se zde nebudeme zabývat).

Je nutné ještě dodat, že každá diferenciální rovnice $n$-tého řádu je formálně ekvivalentní se soustavou $n$ rovnic 1. řádu. Například k rovnici 2. řádu $\ddot{x} = g(x)$ zavedeme formálně novou funkci $p(t) = \dot{x}$ a dostáváme tak soustavu dvou rovnic 1. řádu pro 2 neznámé funkce $x, p: \ \dot{x} = p, \ \dot{p} = g(x)$. Řád soustavy je potom součtem řádů každé rovnice a tolik musí být i celkový počet počátečních podmínek nebo prvních integrálů.

Než popíšeme souvislost diferenciálních rovnic s fyzikou, mechanikou nebo problémem tří těles, věnujeme ještě jeden paragraf technice jejich řešení.

## 4. Jedna speciální ukázka řešení diferenciální rovnice

Ve světě matematiky existuje bezpočet funkcí. V dalším textu se omezíme jen na funkce jedné proměnné. Každá může být řešením nějaké diferenciální rovnice, dokonce mnoha různých diferenciálních rovnic. Podobně jako každé číslo může být řešením nějaké algebraické rovnice nebo mnoha algebraických rovnic. Každá funkce může být vyjádřena mnoha způsoby, např. $x(t) = \cos^2 t + \sin^2 t$ a $y(t) = 1$; je zřejmé, že $x = y$ i když je jejich zápis jiný. (Podobně např. $3 = 2 + 1$; je to jen jiný zápis téhož čísla.) Souvislost rovnice a jejího řešení má význam z tohoto hlediska: některá čísla nemůžeme zapsat pomocí cifer, ale jen na ně odkazujeme jako na kořen rovnice. Klasickým příkladem je imaginární jednotka, která je kořenem rovnice $x^2 = -1$. Stejně tak existují funkce, u nichž nenajdeme žádný vztah k známým „základním" funkcím, víme o nich jen, že jsou řešením nějaké diferenciální rovnice. Tou rovnicí je vlastně funkce definována. Pro některé argumenty jsme někdy schopni zjistit jejich funkční hodnoty a tak se o nich alespoň něco dalšího dozvědět.

Pro řešení diferenciálních rovnic bylo vyvinuto bezpočet metod. Když řešíme nějakou diferenciální rovnici, stojíme často před problémem, v jakém tvaru máme hledanou funkci zapsat. Hledači řešení se také často hádají, kdy je ten či onen tvar výhodnější nebo průchodnější.

Existuje jeden (dá se říci standardní) tvar, v němž můžeme funkce vyjádřit (bohužel ne všechny, ty neposlušné ale v této úvaze nehrají roli). Je to tzv. mocninná řada; protože Newtonův mladší vrstevník Brook Taylor první publikoval některé její významné vlastnosti, mluví se také o *Taylorově řadě*. Jedná se o zápis

$$x(t) \;=\; \alpha_0 \;+\; \alpha_1 t^1 \;+\; \alpha_2 t^2 \;+\; \alpha_3 t^3 \;+\; \alpha_4 t^4 \;\;+\; \ldots . \tag{1}$$

Je to nekonečná řada, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ jsou konstanty, kterých je tedy také nekonečně mnoho. Nyní ukážeme elementární příklad, jak Taylorovu řadu jednoduše použít při řešení diferenciální rovnice. Řešme čistě matematicky následující rovnici 2. řádu.

$$\ddot{x} \;=\; -x \;.$$

(Někdy se jí říká *harmonický oscilátor* protože popisuje pravidelné kmitání nějakého systému. Zrychlení $\ddot{x}$, tedy síla, je přímo úměrná vzdálenosti od jejího zdroje. Můžeme si třeba prostě představit těleso připevněné na konci pružiny:

čím víc ji napínáme, tím větší silou v opačném směru nám v tom brání. Když ji uvolníme, začne s ní těleso pravidelně kmitat.)

Protože je rovnice 2. řádu, bude její řešení obsahovat 2 počáteční podmínky, řekněme konstanty $a, b$. Označíme si jejich význam (tak je to obvyklé) jako $a = x(0), b = \dot{x}(0)$.

Řešení hledáme ve tvaru Taylorovy řady. Z (1) je zřejmé, že

$$x(0) \;=\; \alpha_0 \;=\; a, \qquad \dot{x}(0) \;=\; \alpha_1 \;=\; b\ .$$

Dále budeme postupovat zcela mechanicky: protože $\ddot{x} = -x$ víme hned, že také $\dddot{x} = -\dot{x}$, $x^{(4)} = -\ddot{x}$, atd. pro vyšší derivace až do nekonečna. Zároveň z předpokládaného tvaru nekonečné řady (1) triviálně dovodíme, že

$$\begin{aligned} \ddot{x}(0) &= 2\alpha_2 = -x(0) = -a, \\ \dddot{x}(0) &= 6\alpha_3 = -\dot{x}(0) = -b, \\ x^{(4)}(0) &= 24\alpha_4 = -\ddot{x}(0) = a, \quad \dots\ . \end{aligned}$$

Známe tím pádem všechny konstanty $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ . Čili jen mechanickým postupem, prakticky bez námahy, jsme získali řešení

$$x(t) \;=\; a\;(\;1\;-\;\frac{t^2}{2!}\;+\;\frac{t^4}{4!}\;-\;\dots)\;+\;b\;(\;t\;-\;\frac{t^3}{3!}\;+\;\frac{t^5}{5!}\;-\;\dots)\ .$$

V tomto tvaru můžeme považovat řešení za ukončené. Každý mladý zájemce o matematiku ale jistě ví, že nekonečná řada $1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots$ se nazývá *cosinus* a ta druhá $t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots$ má jméno *sinus* a obě lze jednoduše geometricky znázornit. Můžeme proto psát elegantně

$$x(t) = a\cos t + b\sin t\ .$$

(To jsou právě ty harmonické kmity.) Většina funkcí zapsaných ve tvaru nekonečné řady však pochopitelně žádné jméno nemá a musíme vystačit jen se znalostí oněch konstant. Naopak mají mnoho nejrůznějších vlastností, které z nich musíme pracně dobývat. Tak snadno jako v této ukázce to jde ovšem jen výjimečně. Popsaný příklad je ale důležité promyslet; v mechanice se tento typ rovnice, kdy je druhá derivace vyjádřená pomocí nižších derivací, vyskytuje ve většině případů (důvod uvidíme dále).

V příkladu jsme se spokojili s řešením v této fázi, protože spoléháme na důkaz, že řady pro sinus a cosinus *konvergují*, to jest že součet nekonečně mnoha jejich členů je konečný . Není to na první pohled zřejmé. Kdybychom např. bezhlavě naprogramovali počítač (který umí opravdu rychle sečíst opravdu hodně čísel), se zlou bychom se potázali, kdyby měl takto spočítat $\sin(t)$ pro nějaké větší $t$, třeba jen $t = 10^2$. Přesto v podstatě není jiná možnost, než použít právě tuto řadu. (V tomto případě je dobrá naděje, že řada konverguje: i pro veliké $t$ najdeme vždy nějaké veliké $n$, pro které se zlomek $t^n/n!$ začne zmenšovat. Výpočet se ale provádí tak, že se dokáže, že $\sin(t)$ nebo $\cos(t)$ je funkce $2\pi$-periodická a velký argument se zredukuje na nějaký $< 2\pi$. Důkaz periodičnosti ale není snadný a nebudeme ho zde rozebírat.)

Obecně bývá bohužel důkaz konvergence obtížný a v jádru je v něm skryta hlavní práce, kterou musíme do řešení rovnice vložit. Pohříchu se ale příliš často setkáme s řadami, které vůbec konvergentní nejsou, říkáme, že jsou *divergentní.* (Z opatrnosti bychom měli spíš říkat „divergující“, protože „divergentní“ znamená zaručit, že součet s jistotou neexistuje, což dokázat může být ošidné.)

A přesto stojí za to zkoumat, jestli některé divergentní řady nejsou náhodou alespoň sčítatelné (*summable*), ačkoliv to často na první pohled vypadá paradoxně. Jako klasická ukázka se uvádí Eulerův výsledek

$$1 - 1! + 2! - 3! + 4! - 5! + 6! - \ldots = 0.596347\ldots .$$

Uvěřili byste tomu? Mnoho lidí se zdráhá uvedené rovnítko uznat, nicméně je to tak a existují dobré důvody hledat řešení diferenciálních rovnic mezi divergentními řadami.

Každý mladý matematik, který projde základním kurzem diferenciálních rovnic, si osvojí mnoho metod jak ten či onen typ rovnice řešit. Smyslem toho, že jsme jednu z nich zde stručně nastínili, bylo připravit čtenáře na ten obecný jev, že prakticky všechny funkce, s nimiž se ve fyzice setkáváme (kromě těch opravdu triviálních), jsou nekonečné řady. Dokonce i tak všední funkce jako sinus, cosinus, logaritmus nebo exponenciála jsou nekonečné řady. Při setkání s diferenciální rovnicí se postupuje obvykle tak, že zjišťujeme v katalogu, jestli už je vyřešená; pokud ne, zkusí se nekonečná řada. Samozřejmě její jednotlivé členy nemusí být $t^k$, bývají to nejčastěji zase nějaké nekonečné řady, ale aspoň s určitými přehlednými vlastnostmi.

### 5. Proč používáme diferenciální rovnice?

Samozřejmě nikde není předem dáno, že k popisu pohybu tří těles jsou nezbytně nutné diferenciální rovnice. Nejsou žádným přírodním jevem, ale výmyslem lidí. Tak například k popisu pohybů dvou těles je určitě nepotřebujeme. Ten systém, jak bylo již řečeno, je do té míry jednoduchý, že vzorec na chování dvou těles (ovšem s pomocí inerciální soustavy!) se podaří uhodnout. Pohyb tří těles je evidentně komplikovanější a uhodnout vzorec pro jeho předpovídání se jeví jako beznadějné. Odvážnému ale štěstí přeje a za pomoci silných počítačů se může zkusit i to. K tomu bychom ale potřebovali větší zásobu zkušeností a naměřených dat. Těch je málo – alespoň co se týká nebeské mechaniky. Přísně vzato, v rámci sluneční soustavy nenajdeme skutečný plnohodnotný model problému tří těles, ale vždy jen nějakým způsobem redukovaný. V systému Slunce-Jupiter-Saturn, tedy tří nejhmotnějších těles, je poměr hmotností cca 3500:3:1 a poučení nám mohou poskytnout jen nepatrně porušené keplerovské dráhy, takže se dozvíme spíše jen něco o té poruše. Ještě méně příznivé poměry jsou v systému Jupiter-Callisto-Ganymedes, cca 17640:1:1. Nejlepší poměr hmotností má dvojice Pluto-Charon cca 8:1, ale jeho ostatní měsíčky jsou asi o 6 řádů lehčí a kromě toho celý systém je příliš vzdálený na podrobnější měření. Nakonec musíme vzít zavděk naším domácím systémem Země-Měsíc s poměrem hmotností 81:1, bohužel bez dalšího tělesa; s umělými sondami ale můžeme proměřit alespoň restringovanou úlohu (o ní bude dále hlavně řeč). Tu může částečně zkoumat i sonda Cassini v okolí Saturnu, která je tak vedle letů Apollo a GRAIL k Měsíci nejlepší laboratoří problému. V hlavním pásu asteroidů byly sice objeveny už i trojité asteroidy, ale jejich proměřování je technicky stejně problematické jako u spektroskopicky viděných trojhvězd.

To, co bychom potřebovali – systém s poměrem hmotností přibližně 1:1:1 – ve sluneční soustavě nemáme a uhodnutí vzorce můžeme zatím odkázat do říše snů.

Proč tedy diferenciální rovnice? – Prostě proto, že to tak zavedl Isaac Newton, měl s nimi mimořádný úspěch a nikdo zatím nic lepšího nenavrhl. Měly by nás zejména zajímat důvody k jejich zavedení, protože teorie byla v podstatě předložená „od stolu“. Například ve srovnání s našimi chatrnými možnostmi, neměl Newton ve své době už vůbec žádnou šanci svoji teorii ověřit a současníkům se musela jevit jako čirá spekulace. Newton také s publikováním rozhodně nespěchal a nakonec ho ke zveřejnění museli přátelé trochu nutit.

Idea celé koncepce je prostá: chceme nějakým přirozeným způsobem popsat trajektorii tělesa v nějakém souřadném systému, kde jeho pohyb je čímsi (neurčitým nebo ne nutně známým) způsoben nebo ovlivněn. Pohybem rozumíme změnu stavu, tedy změnu těch souřadnic. Takovému systému se dnes obecně říká *dynamický systém*. Řecké slovo *dynamis* znamená něco jako „možnost“ , „schopnost“, „mohoucnost se změnit“ . V moderním pojetí je dynamický systém velmi precizní (a také dost složitá) matematická konstrukce. Tradičně řeší dvě základní otázky: 1) co rozumíme pod pojmem souřadnice nebo stav, a 2) do jaké míry jsme schopni pochopit pravidla, která změny souřadnic určují. Fantazii se meze nekladou: za souřadnice můžeme považovat jakákoliv čísla, ne nutně měřená v metrech; pravidla jsou obvykle nějaké rovnice, ale to také není obecně nutné, mohou to být jakékoliv vztahy; změny se většinou chápou jako změny v čase (rovnoměrně plynoucím), ale mohou probíhat i diskretně, bez použití času. V poslední době je populární kapitolou studia dynamických systémů například teorie chaosu.

Jádrem newtonovské mechaniky je odpověď na otázku, co rozumíme slovem **stav**. Stavem se rozumí dvojice [poloha, rychlost], symbolicky píšeme $[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}]$. ($\mathbf{x}$ je prostě číslo nebo běžný vektor; čili pracujeme-li ve dvourozměrném prostoru, má 2 složky $(x, y)$, ve třírozměrném 3 složky $(x, y, z)$, atd. Stejně tak je i $\dot{\mathbf{x}}$ vektor a tedy stav je samozřejmě také vektor. Často se v textu vektory zdůrazňují tučným písmem. My si dál důsledné rozlišování vektorů a skalárů odpustíme; dělá se to tak běžně, protože normálně je vždy z kontextu jasné, kdy se o vektory jedná a kdy ne.)

Stav se tedy vyvíjí v čase; na počátku našeho pozorování, řekněme v čase $t = 0$, je stav tělesa $[x_0, \dot{x}_0]$. Teorie praví, že **jediné**, na čem závisí budoucnost sledovaného tělesa v rámci daného dynamického systému, jsou právě tyto počáteční hodnoty polohy a rychlosti, nic víc, nic míň. Je například jasné, že kámen bude jinak padat ze skály nízké a jinak z vysoké, rozdíl bude určitě také v tom, jestli ho jen pustíme (má na začátku nulovou rychlost) nebo hodíme (má nenulovou rychlost).

Polohu tělesa v newtonovském systému tedy popisuje nějaká funkce $x = x(t, x_0, \dot{x}_0)$ (= trajektorie) a to je to hlavní, co potřebujeme vědět a co obvykle hledáme. Z ní se také můžeme kdykoliv dozvědět okamžitou rychlost tělesa jednoduše tím, že si vyčíslíme derivaci této funkce podle času. Znalost mnoha různých trajektorií, které se odvíjejí od mnoha různých počátečních podmínek nám něco napoví o zkoumaném dynamickém systému jako takovém, čili o té „moci“ , která tělesem hýbe. Namísto velké množiny trajektorií bychom ale zřejmě raději znali nějaký vzorec jednodušší v tom smyslu, že by se v něm počáteční podmínky vůbec nevyskytovaly a byl by na nich zcela nezávislý. K vyloučení počátečních podmínek se rovnou nabízí přirozená následující cesta: jestliže poloha je nějaká funkce času (ta je sama sobě svou „nultou derivací“), její rychlost je první derivace podle času; dál si můžeme spočítat ještě i druhou derivaci. Do ní pak lze dosadit namísto počátečních podmínek její nižší derivace.

Nejlépe je uvést prostý příklad (zmiňovali jsme ho v minulých odstavcích jako jednorozměrný harmonický oscilátor). Dejme tomu, že jsme mnoha pokusy zjistili, že se testovací částice v nějakém dynamickém systému pohybuje podle vzorce

$$x(t, x_0, v_0) = x_0 \cos t + v_0 \sin t \ , \tag{2}$$

$x_0$ je počáteční poloha, $v_0$ je počáteční rychlost. (Znamená to, že jsme dělali mnoho pokusů s různými $(x_0, v_0)$ a částice se vždy chovala podle tohoto vzorce, takže uvěříme, že je správný.) Odtud hned také víme, že

$$\dot{x}(t, x_0, v_0) = -x_0 \sin t + v_0 \cos t \ .$$

Pro 2 konstanty $(x_0, v_0)$ máme 2 rovnice a algebraicky (v tomto případě triviálně) vypočítáme

$$\begin{aligned} x_0 &= x \cos t - \dot{x} \sin t \\ v_0 &= x \sin t + \dot{x} \cos t \end{aligned}$$

Na závěr celého procesu už jen podruhé zderivujeme funkci $x(t, x_0, v_0)$ podle času

$$\ddot{x}(t, x_0, v_0) = -x_0 \cos t - v_0 \sin t$$

a po dosazení za $x_0, v_0$ dostaneme konečný vzorec

$$\ddot{x} = -x \ . \tag{3}$$

Výsledek celé transakce je ten, že zmizely počáteční podmínky a náhradou za to máme rovnici, obsahující výrazy $(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$, tedy diferenciální rovnici 2. řádu. Síla harmonického oscilátoru je v tomto příkladu dokonce tak jednoduchá, že nezávisí ani na čase ani na rychlosti, ale pouze na vzdálenosti testovací částice od počáteční polohy. Kdybychom rovnici zpětně vyřešili, dostali bychom pochopitelně původní vzorec pro pohyb; tedy vzorec i rovnice jsou z tohoto hlediska rovnocenné a celá námaha sama o sobě zdánlivě nedává smysl. Vtip je ale v tom, že výraz $\ddot{x}$ má v Newtonově teorii privilegovaný význam. Geometricky je $\ddot{x}$ změna rychlosti v čase, tedy *zrychlení* a když ho vynásobíme konstantní hmotností, obdržíme podle definice vzorec pro sílu. A síla – jak říká Newton – je něco, co už podléhá principu superpozice, čili ji lze rozdělovat, třídit nebo sčítat jako parallelogram.

Aby byl význam sčítání sil úplně zřejmý, spočítáme ještě jeden ukázkově jednoduchý jednorozměrný příklad.

Právě jsme odvodili, že s tělesem jednotkové hmotnosti, které se chová podle vzorce (2), pohybuje síla (3). Experiment jsme mohli realizovat třeba tak, že bychom těleso jednotkové hmotnosti nechali kmitat na pružině, jejíž druhý konec je někde pevně fixován. Při pokusu předpokládáme, že těleso není pod vlivem žádných jiných sil, zejména ne pod vlivem zemské tíže, a že pohyb způsobuje jen pružina.

Uděláme ještě druhý triviální experiment: necháme stejné těleso volně padat pod vlivem konstantní tíže, například z Pisánské šikmé věže na zem. (Pisa byla svědkem historicky prvních Galileových pokusů s volným pádem.) Je zřejmé, že nalezneme známý vzorec pro volný pád, v němž $g$ je konstanta zemské tíže.

$$x(t, x_0, v_0) = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + x_0 \ . \tag{4}$$

$x$ je zde souřadnice mířící svisle dolů, s počátkem definovaným tak, aby $x_0$ bylo na horním zábradlí.

Máme tedy dobře prozkoumané pohyby způsobené jednou a druhou izolovanou silou. Nyní nás zajímá, jak bude vypadat pohyb, když obě síly budou působit současně. Vylezeme proto ještě jednou na Pisánskou věž, tam pověsíme jeden konec pružiny na zábradlí, na druhý konec pružiny testovací těleso a ve svislém směru rozkmitáme.

Z obou předchozích experimentů chceme předpovědět, jak se bude nyní těleso pohybovat. Dopustili bychom se velké chyby, kdybychom oba vzorce jenom bez uvážení sečetli

$$x(t, x_0, v_0) \quad \stackrel{?}{=} \quad \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + x_0 \quad + \quad x_0 \cos t + v_0 \sin t \ .$$

Ani nemusíme jezdit do Pisy a lézt na věž, abychom viděli, že takto se těleso pohybovat v žádném případě nebude. Byť zavěšené na pružině, podle výše uvedeného vzorce by totiž po krátkém čase mělo spadnout na zem. Správný postup je (podle Newtona) takový, že spočítáme nejprve sílu z prvního pohybu (ta je $\ddot{x} = -x$), potom z druhého pohybu (ta je $\ddot{x} = g$) a sečíst můžeme teprve tyto dvě síly, tedy

$$\ddot{x} = -x + g \ .$$

Z této rovnice pak lze najít správný vzorec pro pohyb

$$x(t, x_0, v_0) = x_0 \cos t + v_0 \sin t + g \ (1 - \cos t) \ .$$

O matematické správnosti výsledku se můžete přesvědčit buďto zkouškou nebo se můžete pokusit diferenciální rovnici vyřešit – například postup naznačený v minulé kapitole vede k cíli snadno a rychle. Těleso tedy na zem nespadne a kmitá jen kolem své nové rovnovážné polohy u horního zábradlí.

(*Významná poznámka:* Čtenář by mohl namítnout, že v prvním experimentu nevstupuje do hry jen síla pružiny (3), ale že zde hraje roli ještě vazbová síla zábradlí, které drží konec pružiny fixovaný i když ji napínáme. Pocitově to tak jistě může být, ale musíme se držet definice síly, tedy 2. Newtonova zákona. Zábradlí je tak pevné, že udrží konec pružiny nehybný a měříme-li jeho zrychlení (toho konce pružiny), musíme pochopitelně naměřit 0. Podle definice je tedy i síla zábradlí působící na konec pružiny evidentně nulová. 2. Newtonův zákon pojatý jako definice samozřejmě mluví jen o silách, které se projevují nějakým zrychlením.)

Nelze s jistotou tvrdit, že Newton uvažoval přesně tak, jak je zde popsáno. Sám svoji argumentaci odvozuje téměř výhradně „geometricky“, t.j. na základě proporcí geometrických útvarů a porozumět jí není úplně snadné. Celá metoda se takto vykládá až z pohledu pozdějších zobecnění, pocházejících od Lagrangea a mnoha dalších. Vznikla bezpochyby inspirovaná planetárními pohyby, zejména ale dobře popisovala obyčejnou „pozemskou“ mechaniku, jako třeba volný pád, harmonický oscilátor, kyvadlo, brachistochronu apod.

Teorie se dobře osvědčovala až do objevu záhadného stáčení perihelu Merkuru, který byl uspokojivě vypočítán až aparátem obecné teorie relativity (1915); tedy metodou, která se obejde bez pojmu inerciální soustavy a bez pojmu síly vůbec. Ovšem k tomu je potřeba dodat, že použití rovnic obecné relativity samotný problém tří těles v žádném případě nezjednoduší. Newtonova mechanika je v jistém smyslu limitní případ obecné relativity a ta musí být proto už z principu komplikovanější.

Koncepce je dobře použitelná v systému, kde můžeme bez problémů měřit vzdálenosti, eventuálně i čas a tyto veličiny mají smysl. Nezdá se, že bychom ji mohli využít tam, kde vzdálenosti měřit neumíme nebo nemůžeme. Příkladem mohou být atomy nebo jejich jádra, kde sotva lze přiložit pravítko mezi dva protony. Kromě toho nás experimenty poučují o platnosti tzv. principu neurčitosti, podle něhož se nám nikdy nemůže podařit změřit současně polohu a rychlost. Na potíže stejného druhu pak můžeme narazit i na ohromných mezigalaktických vzdálenostech, kde není úplně jasné, jak efektivně měřit čas a vlastně ani vzdálenost.

---

Jako návod k použití je konstrukce pojmu síly po matematické stránce jasná. Zbývá ještě obhájit ji proti různým filosofickým námitkám. V předešlých odstavcích jsme zmínili námitky proti inerciální soustavě a absolutnímu času shrnuté a rozebrané v Mechanice Ernsta Macha. Další významnou pochybnost představuje otázka, proč máme věřit předpokladu, že právě poloha a rychlost mají být jediným určujícím parametrem jejich pohybu. Tedy potažmo, proč jsou pohybové rovnice právě druhého řádu, proč ne třeba prvního nebo třetího anebo třeba jedenapůltého, apod. Důvody zřejmě souvisí s historií formulace *principu setrvačnosti*, který sám má prokazatelně velmi hluboké kořeny v peripatetické tradici. Často užívaný přívlastek „peripatetický“ znamená „v duchu Aristotelovy filosofie“. Filosofové se v Aristotelově athénské škole při diskusích procházeli zahradou a rozkládali přitom rukama; *peripatetikos* se překládá jako „procházející se“.

Do některých Aristotelových knih by měl každý student alespoň nahlédnout už na střední škole, například do Druhých analytik, Poetiky nebo Politiky (vůbec nejlepší by bylo naučit se ještě zamlada řecky a přečíst si je všechny). Přírodovědné názory, sebrané do obsáhlé Fyziky a Metafyziky, jsou dnes ale považovány za překonané. Často se dokonce soudí, že právě polemika a vyvrácení Aristotela připravily v 16. století renesanci přírodozpytu v Evropě. Navzdory tomu v něm řada původních schemat ale stále přetrvává; mnohdy téměř nepozorovaně.

Aristoteles měl zálibu v kategorizaci a ve své Fyzice (VIII,4) rozlišuje pohyby v zásadě na *přirozené* (dějí se samy od sebe) a *protipřirozené* (nastanou vlivem nějakého násilí). Další komentáře, kterými v originále Aristoteles toto rozdělení doprovází, dnes musíme považovat za scestné. Přesto je v 16. století přebíraly prakticky bez výjimky zvlášť italské university, odkud časem povstal nejprve jakoby v mlžném oparu, v různých podobách a s počáteční nejistotou *princip setrvačnosti*. Ten nakonec vykrystalizoval u Newtona jako jeho První zákon a na něm od té doby stojí výklad fyziky už od středních škol. Galileovi učitelé, i on sám, věnovali hodně času a námahy například obhajobě názoru, že existuje pohyb, který je zároveň přirozený (secundum naturam) a zároveň i protipřirozený (contra naturam, violentum). Kladou si otázku, zda přirozený pohyb může být věčný a zda protipřirozený pohyb musí být vždy omezený a čím se v tomto smyslu liší. Tak jako se liší samotné pohyby, liší se také jejich příčiny. Většina pohybů které studujeme je „násilné“ povahy, to znamená, že jejich bezprostřední příčinou je nějaká síla. V sérii dlouhého řetězce, kde každá příčina má zas nějakou příčinu, se nakonec vždycky dobereme konečné instance, kterou je tzv. prvotní hybatel (*próton kinún*); od něj se každý pohyb odvíjí, závisí na něm a nemůže se bez něj obejít. Podle peripatetické logiky musí být sám o sobě nehybný a v sobě obsahuje věčný pohyb, který ani nevznikl ani nezanikl a je tedy neměnný. Dokud do života věcí nevstoupí násilí prostřednictvím síly, vše je buď v klidu nebo v rovnoměrném pohybu. Tato mantra se víceméně neplodně opakuje stále dokola, na universitách si ji předávají učitelé s žáky po celá desetiletí a až teprve v Galileově době jí dají efektivní smysl, když začnou rychlost a její změny doopravdy měřit a počítat. K tomu nutně potřebovali dobrou definici času a také sestrojit hodiny.

Každý násilný pohyb je tedy poznamenán oním prvotním stavem klidu nebo věčným přirozeným pohybem. Podstatu sil pak pochopíme jen tehdy, když tuto „zátěž“ nějak vyloučíme nebo se jí zbavíme. A to je přesně to, co Newton s pomocí diferenciálních rovnic udělal.

Není možné nevidět Aristotelův vliv. Podléhá mu jak Galileo, tak Newton a sami k tomu měli jistě dobré důvody. Ovšem otázka, jestli na něj spoléhají oprávněně, tím uzavřená není.

### 6. Rovnice pohybu tří těles

Kdybychom chtěli vyřešit problém tří těles podle klasického Newtonova návodu, museli bychom se vypořádat s komplikovanou soustavou diferenciálních rovnic. Nebudeme se zde vůbec o nic takového pokoušet, jen ukážeme, jak se to dělá, lépe řečeno jak se to nedělá, resp. proč se to nedělá.

Protože se obecně tři tělesa pohybují v prostoru o třech dimenzích, musíme vzít do úvahy 3x3 = 9 rovnic pro 9 neznámých funkcí:
$x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$, $x_2(t)$, $y_2(t)$, $z_2(t)$, $x_3(t)$, $y_3(t)$, $z_3(t)$, kde $x_1(t)$ je $x$-ová souřadnice 1.tělesa, jak se mění s časem, $y_1(t)$ je $y$-ová souřadnice 1. tělesa, $x_2(t)$ je $x$-ová souřadnice 2. tělesa atd.

Rovnice jsou 2. řádu a budou tedy obsahovat 2x9=18 konstant, které lze jednoznačně přiřadit k počátečním podmínkám. Těch je stejný počet; kromě 9 počátečních poloh ještě 9 počátečních rychlostí. Říkáme, že úloha má 18 stupňů volnosti.

Aby bylo zřejmé, jak jsou složité a propletené, napíšeme učebnicový zápis jen jedné z nich:

$$\begin{aligned} m_1\,\ddot{x}_1 \;=\; &-\frac{Gm_1m_2(x_1-x_2)}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}^{\,3}} \\ &-\frac{Gm_1m_3(x_1-x_3)}{\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2}^{\,3}}\,, \end{aligned}$$

tzn. na první těleso o hmotnosti $m_1$ působí gravitační silou současně těleso o hmotnosti $m_2$ ze vzdálenosti $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ a ještě těleso o hmotnosti $m_3$ ze vzdálenosti $\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2}$. $G$ je gravitační konstanta. Zde vystupují jen $x$-ové složky těchto sil, které způsobí zrychlení prvního tělesa ve směru souřadnice $x$. (Nenechte se zmást tím, že ve jmenovateli je 3. mocnina vzdálenosti $r \equiv (x, y, z)$. Absolutní velikost síly $1/r^2$ musíme ještě vynásobit směrovým cosinem $x/r$, abychom počítali jen s $x$-ovou složkou této síly.) Analogicky bychom sestavili ostatní rovnice. Je zřejmé, že nevypadají moc přívětivě.

Co můžeme udělat ihned, je vydělení číslem $m_1$ a to je tak ze standardních úprav všechno. Nejlepší matematici věnovali těmto rovnicím mnoho práce a důvtipu, ale obecné řešení nevymysleli. Dílčím úspěchem je pouze potvrzení některých obecných zákonitostí o soustavách hmotných těles, zmiňovaných i na střední škole: zákon zachování energie, nehybnost těžiště resp. jeho rovnoměrný

přímočarý pohyb a dále ještě zákon zachování momentu hybnosti. Ty určují 10 konstant (1+3+3+3), které snižují počet stupňů volnosti na 8. Rafinovanými úvahami (ty ale přesahují možnosti elementární analýzy) se dále podařilo objevit ještě další dva první integrály, ale víc už nic! Původních 18 stupňů volnosti se redukuje na 6, což samozřejmě nestačí a řešení úlohy zůstává neznámé.
Když se po mnoha nezdarech zjistilo, že obecné řešení nepůjde snadno nalézt, pokusili se mnozí matematici hledat alespoň řešení nějakých speciálních případů. Jsou známa symetrická řešení, např. tělesa obíhající po kružnicích ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku nebo umístěná vhodně na přímce a několik málo dalších.
Důležité zjednodušení je známo jako *restringovaný (redukovaný) problém tří těles*. Popisuje systém, v němž jedno ze tří těles má zanedbatelnou hmotnost oproti dvěma ostatním. Je zřejmé, že například kosmická loď Apollo 8 o hmotnosti cca 30 tun, která putuje mezi Zemí a Měsícem, sotva měřitelně ovlivní dráhu Měsíce, který je $10^{18}$x těžší, o dráze Země ani nemluvě. Tento předpoklad silně zredukuje počet neznámých, protože dráha prvních dvou těles je dopředu známa jako Keplerova elipsa a dále hledáme už jen 3 funkce polohy třetího nepatrného tělesa závislé na 3 počátečních polohách a 3 počátečních rychlostech. Úlohu můžeme udělat ještě přehlednější, když vezmeme v úvahu jen rovinný pohyb, tedy že $z(t) = 0, \dot{z}(t) = 0$. Pak už hledáme opravdu jen 2 neznámé funkce $x(t), y(t)$.

Dál se už budeme zabývat jen tímto omezeným problémem; ani takto drasticky zjednodušený se dosud nepodařilo analyticky rozřešit. Pro ještě větší úhlednost rovnic se ještě ale zbavíme gravitační konstanty.

### 7. Jak velká je gravitační konstanta?

Ze základní školy dnes každý ví, jak se měří zeměpisné souřadnice. Zeměkoule je svým tvarem symetrická ve všech směrech (odhlédneme nyní od toho, že je přece jen mírně zploštělá nebo hrbolatá), ale svým pohybem už tak symetrická není. Kdyby cestovatel na různých místech měřil křivost jejího povrchu, naměří všude stejné hodnoty. Když bude ale měřit například tíhové zrychlení (třeba bude porovnávat dobu kývání svého cestovního kyvadla), budou se někde hodnoty lišit. Čáry, kde jsou stejné, zaznamená do mapy a nazve je rovnoběžkami, protože si všimne, že jsou rovnoběžné a že mají nějaké další vlastnosti: například, že jedna z rovnoběžek je nejdelší, další jsou od ní uspořádané symetricky, atd.

Pozdvihneme-li s cestovatelem svůj zrak od kyvadla ke hvězdám, nelze si nevšimnout, že pohyb hvězd na obloze během noci přímo s rovnoběžkami souvisí. Odtud snadno souhlasíme s názorem, že se hvězdná obloha buďto otáčí kolem osy spojující zhruba Polárku s Mraky Magellanovými nebo se kolem stejné osy – ovšem odvozené z rovnoběžek – otáčí zeměkoule (nebo se otáčejí obě, jen s jinou rychlostí). Kdyby se otáčely hvězdy a zeměkoule byla nehybná, asi bychom naším pokusným kyvadlem rozdílné hodnoty tíhového zrychlení nenaměřili. A tak se tedy přikloníme k druhé možnosti, že je to zeměkoule, která se otáčí, ať už jsou hvězdy na nebi nehybné, či se jen otáčejí o něco pomaleji.

Není ale tenhle závěr přece jen trochu lehkomyslný? Vždyť pohyb je vždycky relativní a když říkáme že se něco pohybuje, musíme také uvést **vůči čemu** se pohybuje. Jestli doopravdy vidíme hvězdy, máme to lehké: zeměkoule se otáčí vůči nim. Kdyby ale zeměkoule byla například zahalená do mlhy jako třeba Venuše, žádné hvězdy neuvidíme. Nebo by se také mohlo stát, že tam v dáli ani žádné hvězdy už nejsou. Vůči čemu se teď zeměkoule otáčí!? Mohli bychom vůbec mluvit o jejím pohybu? A kdybychom o něm tedy mluvit nemohli, jak bychom vysvětlili rozdílné chování kyvadla? – Když nemáme možnost tvrdit, že se zeměkoule pohybuje vůči hvězdám, a přesto se nám z pokusů s kyvadlem zdá, že se pohybuje, tak vlastně řešíme vzájemný pohyb dvou těles: zeměkoule a kyvadla. Zamyslete se nad tím, zda tato dvě tělesa stačí k tomu, abyste prokázali jejich otáčivý pohyb (odpověď zní samozřejmě *ne* a jistě snadno přijdete na to proč.) Podobný problém zmiňuje Newton hned v úvodu Principií. Tvrdí, že dvě kuličky spojené provázkem k tomu stačí. Má pravdu nebo je v tom snad (třeba z hlediska harmonie?) ještě nějaký háček?

Úvodní rozmarný odstavec byl krátkou odbočkou a inspirací k problému zvanému *Machův princip*, který úzce souvisí s problémem tří těles a zcela určitě také leží v základech obecné teorie relativity. Tou se ale nechceme zabývat a vrátíme se k zeměpisným souřadnicím.

K zavedení rovnoběžek nás vedla sama příroda a jsou tedy víceméně přírodním úkazem. Pro orientaci na ploše ale potřebujeme ještě druhou souřadnici. Zavedeme tedy poledníky přirozeně jako čáry kolmé k rovnoběžkám. Zatímco rovník jako nultá rovnoběžka vyplývá z jeho geometrické výjimečnosti, nultý poledník není nijak přirozeně stanoven. Rozhodne o něm boj mezi Londýnem a Paříží. Je úplně jedno kdo ho vyhraje; zeměpis zůstane stále stejný. Kompenzací francouzské porážky je Úřad v Paříži, který rozhoduje o tom jak je dlouhý metr, jak je těžký kilogram, jak dlouho trvá sekunda, atd. Potažmo rozhoduje třeba o velikosti Planckovy konstanty aniž by k tomu Max Planck mohl něco namítnout. Dnes už dokonce leckterý podobný úřad rozhoduje i o tom, jestli je poledne v létě o hodinu dříve nebo později než v zimě a vůbec, kdy je léto a kdy je zima. (Mimochodem stojí za povšimnutí, že definice metru byla někdy v roce 1790 stanovena jako zlomek délky poledníku procházejícího Paříží. Každého hned napadne, proč to nebyl zlomek obvodu rovníku, který je logickým a přirozeným vodítkem. Zřejmě by i takový návrh snad mohl projít, ale to by asi musela Paříž přímo ležet na rovníku.)

Je tedy zřejmé, že některé fyzikální jednotky mohou být přirozené, jiné úřední – s těmi se raději nezaplést. Když řešíme restringovaný problém, ulehčíme si zbytečnou námahu, když si stanovíme jednotku délky, hmotnosti a času sami podle přirozenosti problému. Obvykle se počítá s tím, že jednotkou hmotnosti je celková hmotnost obou primárních těles dohromady a jednotkou vzdálenosti je jejich vzdálenost. Ještě zbývá vyjasnit v jakých jednotkách běží hodiny.

V kruhovém restringovaném problému krouží 1. těleso hmotnosti $m_1$ po kružnici o poloměru $r_1$ kolem společného těžiště úhlovou rychlostí $\omega$, právě tak 2. těleso hmotnosti $m_2$ s poloměrem $r_2$. Podle vzorců ze základních učebnic, kde se porovnává gravitační a odstředivá síla, můžeme psát

$$\frac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2} = m_1r_1\omega^2 = m_2r_2\omega^2 \quad \Rightarrow \quad m_1r_1 = m_2r_2 \ .$$

K tomu přidáme naše 2 požadavky: $r_1 + r_2 = 1$, $m_1 + m_2 = 1$ a triviálně spočítáme

$$r_2 = 1 - r_1 = 1 - \frac{m_2r_2}{m_1} \quad \Rightarrow \quad r_2 = m_1, \quad \omega^2 = 1, \quad G = 1 \ .$$

Máme tu tedy odpověď na otázku o velikosti gravitační konstanty $G$: gravitační konstanta je *jedna*. Ptáme se jedna čeho? Tedy je to 1 (náš metr $M^3$) / (náš kilogram $KG$) / (naše sekunda $SEC^2$). Jak je dlouhá naše sekunda $SEC$ ? To odvodíme z toho, že $\omega = 1$. Tedy, že oběžná doba obou primárních těles vzhledem k inerciální soustavě je $T = 2\pi$ našich sekund.

Počítáme-li například restringovaný problém Země-Měsíc-Apollo, dostáváme převodní tabulku měr a vah:
$1\ M = 384.4 \cdot 10^6 m,\ 1\ KG = 60.471 \cdot 10^{23} kg,\ 1\ SEC = 27.32/(2\pi) = 4.35\ dne = 3.76 \cdot 10^5 sec.$
Novou jednotku $KG$ hned tak nepotřebujeme a jestli astronautům trvala cesta k Měsíci cca 2.5 dne, doletěli tam tedy za cca $0.58 SEC$. Kdyby nás zajímal pohyb asteroidu v soustavě Slunce-Jupiter, měřili bychom v jednotkách

$1\ M = 7.78 \cdot 10^{11} m,\ 1\ KG = 1.99 \cdot 10^{30} kg,\ 1\ SEC = 5.96 \cdot 10^7 sec$, atd.

Jednotky mezi sebou převádíme obyčejnou trojčlenkou a z těchto základních tří si můžeme odvodit řadu dalších, třeba rychlost, s níž stále počítáme.

Z uvedených argumentů je nabíledni, že pro řešení problému tří těles gravitační konstantu nepotřebujeme. Rozhodně ne pro stanovení drah, ani pro porovnávání třeba dvou takových systémů. Význam by měla, kdybychom chtěli porovnávat hmotnost systému tří těles s kilogramem uloženým v Paříži. Pravý geometr ale ponechává takové starosti leda úředníkům, pro nebeskou mechaniku je konstanta bezcenná. V astrofyzice ji ovšem ocenit můžeme; například nedávná pozorování centra Galaxie v infračerveném světle dovolila změřit oběžné doby a poloměr drah hvězd blízkých bodu $SgrA^*$. I bez znalosti gravitační konstanty dojdeme jednoduchým porovnáním s poměry ve sluneční soustavě k udivujícímu výsledku, že objekt v tomto bodě by měl hmotnost cca 4 miliony Sluncí. Kdybychom chtěli počítat vývoj Galaxie (což je problém tří a více těles), toto číslo nám stačí. Ale potřebujeme-li rozhodnout, jestli tak hmotný objekt nahuštěný na tak malý prostor je zářící superhvězda nebo černá díra, k tomu už gravitační konstantu využijeme.

## 8. Restringovaný problém

Pokusíme se nyní podrobněji prozkoumat nejvíce zjednodušenou a také nejčastěji studovanou variantu problému tří těles – rovinný kruhový restringovaný problém.

Jak už jsme v předchozím textu naznačili, v tomto modelu má třetí těleso zanedbatelnou hmotnost ve srovnání s dvěma prvními. Dvě „velká“ tělesa se nazývají primární tělesa nebo také *primáry*, o třetím tělese se často mluví jako o testovací částici. V případě, že jeden z primárů má výrazně větší hmotnost, mluví se někdy o primáru a sekundáru. Oba primáry obíhají rovnoměrně kolem těžiště po kruhových drahách. Základní číselnou charakteristikou tohoto dynamického systému je hmotnostní poměr $a$:

$$a = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \qquad b = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \qquad (a + b = 1)$$

V opačném poměru než hmotnosti jsou pochopitelně vzdálenosti obou primárů od společného těžiště. Počítá se v jednotkách o kterých jsme mluvili už v předchozím textu, tedy klademe $G = 1$.

Základní popis vývoje tohoto dynamického systému bychom měli zapsat v inerciální soustavě. Inerciální systém může být kus papíru, který leží na vašem stole a na nějž si pohyb kreslíte; jeho souřadný systém si označíme jako $(x', y')$. Dráhy obou primárů jsou dopředu známé kružnice a tak počítáme jen trajektorii testovací částice. Kdybychom si sedli do těžiště obou primárů a otáčeli se spolu s nimi, nacházeli bychom se v jiné souřadné soustavě, označíme si ji $(x, y)$. V ní bychom žádné kruhové dráhy neviděli a naopak obě tělesa by byla nehybná na ose $x$. Je to stejné, jako bychom seděli na kolotoči. Mezi oběma souřadnými systémy můžeme souřadnice libovolného bodu přepočítávat podle jednoduchých vzorců zřejmých každému středoškolákovi.

$$\begin{aligned} x' &= x cos\ t - y sin\ t \\ y' &= x sin\ t + y cos\ t \end{aligned} \qquad \text{(neboli)} \qquad \begin{aligned} x &= \phantom{-}x' cos\ t + y' sin\ t \\ y &= -x' sin\ t + y' cos\ t \end{aligned}$$

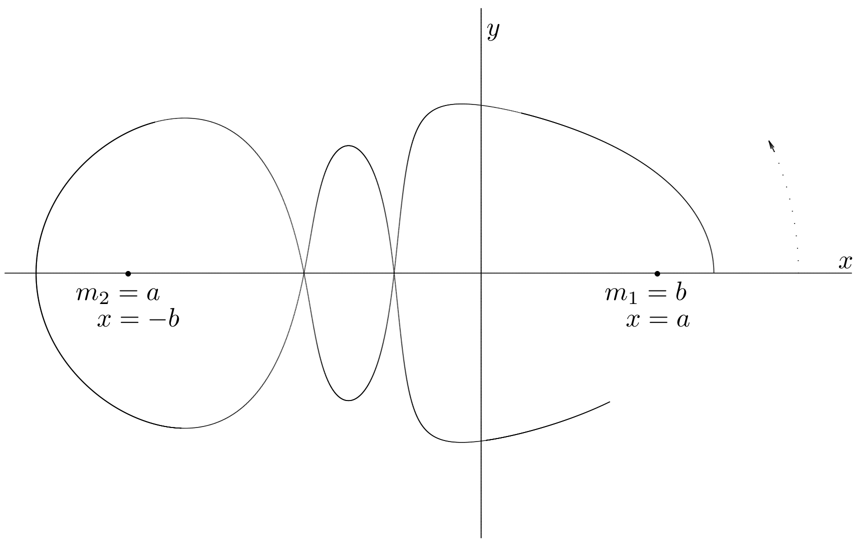
Můžeme se svobodně rozhodnout v jaké soustavě budeme počítat. Obvykle se to dělá v té korotující. Oproti inerciální má jednu obrovskou výhodu: v korotující soustavě jsou primární tělesa nehybná a tudíž jejich gravitační síla nezávisí na čase, závisí pouze na poloze částice $(x, y)$.

Pohybové rovnice zapsané v těchto souřadnicích vypadají takto:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= 2\dot{y} + x - \frac{b(x-a)}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}^{\,3}} - \frac{a(x+b)}{\sqrt{(x+b)^2+y^2}^{\,3}} \\
\ddot{y} &= -2\dot{x} + y - \frac{by}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}^{\,3}} - \frac{ay}{\sqrt{(x+b)^2+y^2}^{\,3}}
\end{aligned} \tag{5}$$

Mohli bychom je odvodit například pečlivým derivováním uvedených transformačních vzorců pro $x', y'$. Na levé straně jsou druhé derivace souřadnic, tedy zrychlení. (V našem zjednodušení, kdy se nestaráme o hmotnost lehkého tělesa, je to tedy síla.) Na pravé straně jsou položky, které toto zrychlení vyvolávají. Po řadě jsou to tzv. Coriolisova síla, dále odstředivá síla a gravitační síly obou primárních těles. Pokud by někdo nalezl takové 2 obecné funkce $x(t), y(t)$, které by po zderivování splnily tyto rovnice a ty funkce dokázal také vyčíslit, získá velké uznání. Ačkoliv se o to mnozí velmi snažili, zatím se to nikomu nepodařilo.

Uspořádání, v jakém se zobrazuje restringovaný problém, je na následujícím obrázku. V korotující soustavě jsou obě primární tělesa nehybná, leží na ose $y = 0$ a jejich vzdálenosti od počátku jsou v opačném poměru než jejich hmotnosti.



Také je zde vykreslena jedna z možných trajektorií třetího „nehmotného" tělesa (je to dráha, kterou si můžete zároveň prohlédnout na obrazovce monitoru při volbě programu `young demo=0`).

Patrně první, kdo věnoval soustředěné úsilí k vyřešení těchto rovnic, byl Joseph Lagrange. Podobně jako všichni před ním obecné řešení nenašel. Podařilo se mu alespoň uzavřít degenerovaný případ, kdy v korotující soustavě zůstává třetí těleso v klidu stejně jako i dvě primární tělesa. Řešení najdete snadno také sami jednoduše tak, že do rovnic (5) dosadíte $\dot{x} = \ddot{x} = \dot{y} = \ddot{y} = 0$. V pěti různých bodech jsou rovnice splněny, dnes se nazývají Lagrangeovy (nebo také librační) body a tři z nich najdete na přímce $y = 0$; L1 je označován bod mezi primáry, L2 a L3 vlevo a vpravo od primárů. Další dva jsou L4 a L5, ty leží přesně ve vrcholech rovnostranných trojúhelníků nad a pod spojnicí obou primárních těles. Kromě těchto přesných řešení jsou už známy jen některé přibližné výsledky, převážně vyjádřené jako poruchy keplerovských elips. Je například zřejmé, že bude-li třetí nepatrné těleso obíhat velmi blízko jednoho z primárů, bude jeho dráha blízká elipse. Tuto elipsu potom druhý primár ovlivňuje „jen málo" jako poruchu, a tu lze v určitých případech alespoň přibližně vyjádřit ve formě nekonečných řad. Stejné postupy se použijí i v situaci, kdy je hmotnost jednoho z primárů „malá" (což je případ dvojice Slunce-Jupiter). Podobně lze nalézt některá řešení i v těsném okolí Lagrangeových bodů. Všechny tyto výpočty jsou ale už nad rámec tohoto textu a nebudeme je dále rozebírat.

S příchodem počítačů se můžeme dozvědět o řešení restringovaného problému něco víc z kompletního numerického výpočtu a dál se budeme věnovat už jen tomu. Říká se, že jeden obrázek poví více než tisíc slov. Dobře naprogramovaný počítač i těch obrázků může nakreslit tisíce. Než ale popíšeme, jak pohyb tří těles naprogramovat, zastavíme se krátce u posledního instrumentu teoretické mechaniky, bez něhož bychom asi sotva mohli něco spočítat.

## 9. Hamiltonián

Jak jsme už zmínili, platí i v problému tří těles, a samozřejmě i jeho redukovaných formách, zákon zachování energie. Už v roce 1836 si Carl Jacobi povšiml, že existuje výraz

$$H = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - x^2 - y^2\right) - \frac{b}{\sqrt{\left((x-a)^2 + y^2\right.}} - \frac{a}{\sqrt{\left((x+b)^2 + y^2\right.}} ,$$

který ve spojitosti s rovnicemi (5) zůstává konstantní. Můžete se o tom sami přesvědčit: když výraz $H$ derivujete podle času, vyjde vám 0. (Vezměte v úvahu, že $H$ je složená funkce času, derivujete tedy například $d/dt(x^2) = 2x\dot{x}$, $d/dt(\dot{x}^2) = 2\dot{x}\ddot{x}$ apod.) Je-li derivace nějaké funkce nulová, pak se určitě jedná o konstantu. Jacobi svůj výpočet publikoval speciálně v souvislosti s restringovaným problémem a proto se zde také nazývá Jacobiho konstanta. Tady ji ovšem označujeme písmenem $H$ a to na počest jiného slavného matematika Rowena Hamiltona. Ten už o 3 roky dříve našel v dynamickém systému obecnou funkci nazývanou dnes *hamiltonián*. Je to zkrácený název pro Hamiltonovu funkci, nebo Hamiltonův operátor. Ukázal velmi obecné vlastnosti své funkce a pro nás je důležité, že je číselně shodný s velikostí celkové energie systému.

Při studiu klasických dynamických systémů je jeho vrcholnou pasáží tzv. Hamilton – Jacobiho teorie, resp. HJ rovnice, v níž je hamiltonián ústřední veličinou. V základních fyzikálních kursech bývá HJ rovnice poslední kapitolou klasické mechaniky a zároveň výchozím nástrojem pro úvod do mechaniky kvantové.

V restringovaném problému doposud není známa žádná jiná podobná funkce, která by zůstávala takto pěkně konstantní, přestože jistě existuje a musí jich být dokonce víc (pochopitelně musí být 4). Takovým funkcím se říká *integrály pohybu* a kdyby neexistovaly, tři tělesa by se buďto nepohybovala nebo by byla Newtonova koncepce neplatná.

Tak, jak je zde funkce $H$ zapsaná, je v podstatě součtem kinetické a potenciální energie. Kinetická energie je $\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$, tedy polovina čtverce rychlosti. Ostatní je potenciální energie: $-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ je potenciál odstředivé síly, výrazy se zlomkem jsou potenciálem gravitační síly.

Zákon zachování energie je obecně znám a výraz pro celkovou energii se běžně používá. Jako úplně triviální příklad může sloužit kámen o jednotkové hmotnosti padající k zemi z výšky $x_0$. Jeho energie je součtem kinetické energie $\frac{1}{2}\dot{x}^2$ a potenciálu (řekli bychom energie v gravitačním poli) $-gx$. Celková energie je tedy $h = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - gx$ a protože je všude stejná, musí být stejná už na vrcholu skály z níž kámen padá a kde je rychlost nulová, t.j. $h = -gx_0$. Odsud potom snadno vypočítáme rychlost $\dot{x}$ v kterékoliv výšce $x$.

Jacobiho konstanta – neboli vyčíslený hamiltonián - slouží při numerických simulacích jako dobrý indikátor chyb. Jestliže se začne při nezávislém výpočtu znatelně odchylovat od konstanty, znamená to, že výpočet je nevěrohodný.

### 10. Numerický výpočet diferenciální rovnice

Znalost nějaké funkce znamená obvykle znalost jejího definičního oboru a dále předpisu, kdy z nějakého čísla získáme aritmetickými operacemi nějaké jiné číslo. Předpis funkce může být ale dobře popsán i jinak – nějakou tabulkou dvojic čísel (argument, funkční hodnota). Když se rovnice problému tří těles nedaří vyřešit analyticky, můžeme se pokusit alespoň o numerické řešení, t.j. najít některé tabulkové hodnoty neznámých funkcí.

První pokusy v polovině 19. stol. vycházely z pozorování planet a měly dobré výsledky, jako např. objev Neptunu nebo hrubé stáčení perihelu Merkuru. Byly založeny na tzv. poruchovém počtu, t.zn. na předpokladu, že planeta kolem Slunce obíhá v zásadě po dobře popsané elipse a ta je jen málo porušená nějakým dodatečným vlivem – třeba gravitací jiné planety. V problému tří těles, kde je jedno z nich mnohem větší než ostatní, je to použitelná metoda a vycházely z ní např. první úvahy o trajektoriích pro cestu na Měsíc už ve 20. stol. a i samotný projekt Apollo. Pohyb rakety v okolí Země je Měsícem (který je 81x lehčí) ovlivněn jen málo a začne hrát výraznější roli až za libračním bodem, tj. až zhruba v poslední šestině cesty k němu.

Citlivým místem metody je odhad, co znamená „málo porušená“ . Hledané řešení se v tomto případě zapisuje jako součet $elipsa + porucha$. Výpočet poruchy ovšem přinese vždy komplikovanou analýzu, která bývá srovnatelně složitá s původními rovnicemi. Každopádně výsledek je vždy pouze přibližný a jeho cena se poměřuje pouze kvalitou odhadu velikosti poruchy.

Poruchový počet ovšem není zdaleka jediná možnost jak se přiblížit k řešení diferenciální rovnice. Například numerický výpočet určitého integrálu lichoběžníkovým nebo Simpsonovým pravidlem ukazuje, že je naděje přiblížit se k správnému řešení libovolně blízko. Na podobném principu je založena řada dalších metod.

Diferenciální rovnice určí v každém bodě hledané křivky tečnu k této křivce, tedy naznačuje směr, kam z daného bodu křivka pokračuje. Kdybychom v tomto směru postoupili jen o malý krůček, zhruba se po ní správně posuneme do dalšího bodu, ovšem s nějakou chybou. Chyba bude tím menší, čím menší bude krok. Z tohoto nového bodu (i když mírně odchýleného) můžeme zase udělat malý krok v novém směru, atd. Je ovšem jasné, že chyba bude stále narůstat a kdybychom neprovedli nějakou korekci, za chvíli bychom počítali s nevěrohodnými čísly.

Idea této metody se dá ale propracovat a začátkem 20. století vymysleli dva němečtí matematici Carl Runge a Martin Kutta způsob, který rafinovaně kumulovanou chybu snižuje. RK4, tedy metoda Runge–Kutta 4. řádu, je dnes daleko nejpoužívanější postup, jak numericky řešit obyčejné diferenciální rovnice

1. řádu. Prakticky jedinou její nevýhodou je obtížný odhad chyby. I když je v principu malá, přece jen existuje a když postoupíme po křivce příliš daleko, může nekontrolovatelně narůstat. Kdo chce tuto metodu spolehlivě použít, musí mít nějaké vlastní kriterium, zda je chyba v normě.

Metoda RK4 je popsaná v každé příručce nebo učebnici numerické matematiky. Máme-li diferenciální rovnici $\dot{x} = f(x)$ pro neznámou funkci $x = x(t)$, postupujeme po malých krocích argumentu $\delta t$ takto: spočítáme v každém kroku 4 koeficienty $k_i$ :

$$k_1 = f(x), \qquad k_2 = f(x + \frac{\delta t}{2} k_1), \qquad k_3 = f(x + \frac{\delta t}{2} k_2), \qquad k_4 = f(x + \delta t\ k_3)$$

a přírůstek funkční hodnoty je potom $\delta x = (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$. Tím se dostaneme z původního bodu křivky $(t, x)$ do nového bodu $(t + \delta t, x + \delta x)$ a celý výpočet podle libosti opakujeme.

## 11. Numerická simulace pohybu

Až potud jsme se zabývali šedou teorií, ale zeleným stromem poznání nám budiž konkrétní pokusy, které dovolují moderní počítací stroje. Ovládáte-li nějaký programovací jazyk, můžete zkusit po přečtení předchozích stránek program pro pohyb tří těles sestavit sami.

Než se do toho pustíte, popíšeme program, který už je hotový a může sloužit jako výchozí ukázka a eventuální pobídka pro další studium.

Program je napsán v jazyku C pro systém Windows, který je v Čechách stále ještě ponejvíc rozšířen, s použitím primitivních grafických funkcí API. Uživatelé Linuxu jej mohou spustit v nějakém emulačním prostředí, nejspíše *wine*. Program je koncipován pro zvídavější povahy jako pokusná laboratoř a předpokládá se jeho spouštění a užívání z *příkazové řádky*. Jak jsme již v úvodu zmínili, je nazván YOUNG, víceméně na počest amerického astronauta Johna Younga. Spouštěcí příkaz ve Windows je tedy `young` , v Linuxu `wine young.exe` . Soubor `young.exe` je volně ke stažení na internetové adrese

`www.themis.cz/young/young.exe`

Při prvním spuštění ukáže na obrazovce demonstrační dráhu restringovaného problému. Na modrém pozadí je bílou barvou vykreslena trajektorie částice v systému dvou těžkých těles s poměrem hmotností 2:1. Počáteční podmínky jsou zvoleny tak, aby dráha byla přibližně periodická. Počáteční podmínky, stejně jako i průběžná data pohybu se zobrazují v pravé (šedé) části obrazovky.

Už při této první demonstraci si uživatel může vyzkoušet ovlivňování pohybu klávesami. Například mezerníkem (space) se pohyb dočasně zastaví a následně rozběhne, klávesa `A` způsobí zrychlení, `S` zpomalení, šipka vpravo (Right) krokování, `+` zvětšení, `-` zmenšení, apod. Klávesou `Esc` se program ukončí, klávesou `H` se zobrazí *help*, kde je podrobnější seznam dalších funkčních kláves.

Kromě kreslení na obrazovku program také zapisuje na disk, je-li to možné. Zvláště při 1. spuštění zapíše na disk také soubor `young.ini`, do nějž vzorově zapíše všechny počáteční hodnoty, s nimiž simulaci provádí. Zejména do tohoto souboru zapisuje poměr hmotností obou primárních těles a počáteční souřadnice a rychlosti testovací částice. Kromě nich také všechny další hodnoty, které ovlivňují výpočet nebo grafické zobrazení.

Soubor `young.ini` se na disk zapisuje pouze v případě, že při spuštění neexistuje. Pokud už existuje, naopak se z něj parametry simulace jen čtou. To znamená, že editací souboru si uživatel zvolí vlastní počáteční podmínky sledovaného pohybu pro další pokusy.

Struktura inicializačního souboru `young.ini` je přirozeně textová, na každém řádku je přiřazení jedné hodnoty k jedné proměnné v syntaxi proměnná = numerická hodnota, např.:

a=0.3333
x=0.44
y=0.
...

Na pořadí řádků nezáleží, platí poslední údaj, řádky uvozené znakem % nebo # se ignorují, jak je to obvyklé. Pro běžné užívání se předpokládá, že uživatel otevře soubor `young.ini` ve svém oblíbeném editoru, zapíše vlastní hodnoty podle libosti, soubor uloží a následně spustí program, který si na startu z tohoto souboru počáteční hodnoty přečte a provede výpočet. Program má i vlastní editor souboru `young.ini` pro uživatele, který s žádným jiným editorem nepracuje; vyvolá se klávesou `E` při běhu programu. Kromě tohoto hlavního způsobu zadání hodnot je možné zadat požadované hodnoty z příkazové řádky. Zadání se provede ve stejné syntaxi jako v `young.ini`. V tom případě samozřejmě mezera slouží jako oddělovač, takže kolem rovnítka vpravo ani vlevo mezera nesmí být. Hodnoty zadané z příkazové řádky mají větší prioritu než ze souboru `young.ini`.

Vždy při startu zapisuje program na disk soubor `young.now`; ve stejné struktuře jako `young.ini` zapíše skutečné hodnoty s nimiž počítá (například ty, jež jsou pozměněny z příkazové řádky). Na disk program zapisuje rovněž povelem klávesy `W` při běhu, kdy zapíše aktuální stav pohybu do souboru `young.hit`. Kromě toho může zapisovat (při zadání klíče `-w`) celý průběh výpočtu.

Z několika klíčů, které ovlivňují jeho průběh (mohou být zadány jak z inicializačního souboru, tak z příkazové řádky) je třeba zmínit klíč swI, který swapuje 3 zobrazovací režimy (0,1,2): pohyb v korotující soustavě, pohyb v inerciální soustavě a navíc „romantická“ verze v inerciální soustavě, beze stopy trajektorie. Swapování může probíhat i během výpočtu klávesou `I`, kdy celý výpočet proběhne znovu od začátku.

Mezi další důležité vstupní hodnoty patří zejména velikost integračního kroku $dt$, který velmi silně ovlivní přesnost výpočtu. Jeho optimální hodnota je přibližně v intervalu $10^{-3} - 10^{-7}$. Hrubší krok vede k brzkému rozpadu výpočtu, jemnější krok většinou výpočet zbytečně zpomalí. Věrohodnost výpočtu indikuje odchylka hamiltoniánu, která se průběžně zobrazuje. Pokud odchylka přesáhne stanovený limit $dhlim$, svítí červeně a i další dráha se zobrazuje červeně. Program má rovněž zabudovaný klíč $autocr = 0, 1$, který při zapnutí (1) automaticky redukuje integrační krok při nebezpečné odchylce hamiltoniánu.

Je třeba si uvědomit, že algebraické operace provádí počítač mnohem rychleji než operace výstupu na obrazovku. Proto lze výpočet silně zefektivnit volbou $dtscan =$. Je-li zadaná tato hodnota, program provede $dtscan$ integračních kroků a pak teprve zobrazí polohu na obrazovku. Default je $dtscan = 4$, můžete zadat i hodnotu několik tisíc a příslušně snížit velikost integračního kroku $dt$.

Volba $ttbreak =$ způsobí zastavení výpočtu po uplynutí doby $ttbreak$. Mezerníkem (space) můžete ve výpočtu pokračovat. Volba $yybreak =$ způsobí zastavení po $yybreak$-tém přeseknutí osy $x$. Tato volba se hodí při hledání periodických drah.

Program umožňuje i studium drah ve třetím rozměru, zobrazení je ale stále jen dvourozměrné. Barevně je pouze odlišena dráha při $z < 0$.

Program sice má v paměti obraz křivky, není však možné se po ní libovolně vracet. Klávesa šipka vlevo (Left) dovolí návrat jen o jeden integrační krok pro eventuální detailní prohlídku. Kromě toho je možné ale vyvolat klávesou `R` retrográdní pohyb, čili pokračující integraci s krokem $-dt$. Při retrográdním pohybu samozřejmě není zaručeno, že se částice vrátí do výchozího bodu.

Stisknutím klávesy `P` se na disk uloží soubor `young.bmp`, což je aktuální snímek obrazovky.

V případě „a=“ je možné pro pohodlí zadat argumenty *moon, earth, jupiter, saturn.*

Mezi zvláštní volby patří klíče $demo =$ s hodnotami $<0{,}10>$. Zobrazují jednu z 11 zabudovaných demonstrací, které jsou navíc podrobně komentovány v další kapitole. Volby uvedené *za* tímto klíčem ještě výchozí hodnoty demonstrace ovlivní.

Potud základní vlastnosti programu. Na webovských stránkách společnosti Themis *www.themis.cz/young* mohou být pro tento program k dispozici další informace, eventuálně popis změn.

## 12. Demonstrace

Pro názornost a uvedení do problému má v sobě program zabudovaných několik demonstračních drah. Dosáhnete je voláním z příkazového řádku s jediným parametrem „demo=“ a číslo dráhy, např.

```
young demo=1
```

**demo=0.** (default) Toto je periodická dráha částice ve dvojhvězdě s poměrem hmotností 2:1 a je názornou ukázkou, jak program vlastně pracuje.

Počítač vykreslí na obrazovku tuto dráhu pokud nemá k dispozici jiné počáteční podmínky. a = 0.3333, x = 0.44, y = 0., z = 0., u = 0., v = 3.1161164853880995, w = 0., dt = 0.0003.

Při zkoumání této dráhy stojí za pozornost zejména její citlivost na počáteční podmínky (což ukazuje na její chatrnou stabilitu). Jestliže počáteční rychlost $v$ zvýšíme třeba jen o tisíciny promile např. na v = 3.116117, dráha nevydrží ani druhý periodický oběh a je zachycena lehčí hvězdou.

Podobně, když vystartujeme za stejných podmínek, ale výpočet provádíme s integračním krokem řekněme 3x hrubším dt = 0.001, periodická dráha se rozpadne už v druhém oběhu a částice je zachycena lehčí hvězdou. Naopak při 3x jemnějším kroku dt = 0.0001 je částice zachycena těžší hvězdou.

Z toho je názorně vidět, že nalézt spolehlivé výsledky není zdaleka jednoduché a jejich hledání vyžaduje pečlivou analýzu. Je také zřejmé, že numerické výpočty tohoto druhu jsou značně limitované v dlouhodobých předpovědích. Sotva můžeme tímto způsobem předpovídat pohyb částic např. na škále tisíců nebo milionů let. Na druhou stranu je potřeba ale také poznamenat, že ne každá dráha je tak „křehká“, jako v tomto ukázkovém případě.

Bude-li se vám dráha líbit a budete-li dost trpěliví, můžete si s ní pohrát a zpřísnit kriteria na rozpad hamiltoniánu a hledat přesnější počáteční rychlost $v$ tak, aby dráha byla periodická i v delším časovém období. Uvažte, že maximální přesnost čísel typu „double“ je cca 16 desetinných míst a také zvažte, do jaké míry je možné na podobné výpočty spoléhat.

**demo=1.** Typická translunární dráha: a=0.01215 (Měsíc je 81x lehčí), x=0.44, v=1.51612, dt=0.002 v režimu swI=1. Zde je dobře vidět, že částice obíhá kolem Země v podstatě po elipse, protože Měsíc je příliš lehký, aby ji nějak drasticky ovlivnil. Avšak při těsnějším shledání Měsíc dráhu změní, aby zas nějaký čas byla téměř eliptická. Takto si Měsíc s částicí může pohrávat tak dlouho, dokud nepřijde nějaké opravdu těsné přiblížení, kdy Měsíc částici vystřelí hodně daleko, takže se pravděpodobnost dalšího blízkého shledání výrazně zmenší. Na podobných drahách si např. pohrává Jupiter s kometami.

**demo=2.** Měsíční dráha: a=0.01215, x=0.44, v=1.42, dt=0.0005 v režimu swI=1. Ukázka, jak může vypadat meziplanetární prak: při druhém obletu rakety dojde při blízkém setkání k urychlení Měsícem a apogeum se zvětší 8x. Kdybyste v tomto experimentu změnili počáteční rychlost na v=1.417, zvětší se apogeum už 14x, ale nad Měsícem prosvištíte jen nějakých 12 jeho poloměrů. Když budete zvyšovat riziko srážky s Měsícem, můžete dosáhnout samozřejmě ještě daleko většího urychlení. Po urychlení rakety si můžete trochu zrychlit animaci (Shift-A) a nechat ji 2x obíhat po protáhlé elipse než dojde téměř ke srážce s Měsícem a výpočet se rozpadne.

**demo=3.** Dobrým průzkumem vlastností numerického řešení problému je sledování částice v Lagrangeově bodě L2, tzn. v rovnovážném bodě „za" lehčím primárem. To proto, že přesné řešení dobře známe – částice se v tomto bodě vzhledem k primárům vůbec nepohybuje. Můžeme ho tedy zkoumat s jistotou, že případné odchylky nastanou jen vinou numerické nedokonalosti počítače. Jako demonstrační ukázka slouží dráha s parametry a = 0.1, x = -1.2596998329023313, v=0 v režimu swI=1. x-ová souřadnice je kořenem rovnice 5. stupně, $x + a/(x + 1 - a)^2 + (1 - a)/(x - a)^2 = 0$, tedy obecně reálné iracionální číslo s neukončeným desetinným rozvojem.

Při troše námahy ho naleznete jako výsledek cvičení jednoduchého středoškolského programování. Lépe bychom ho mohli vyčíslit přibližně jako x=-1.2596998329023314150238967663728 … Toto číslo je ale při normálním programování v přesnosti *double* nedostupné, protože přesahuje 16 desetinných míst. Uvedený lepší výsledek je dosažen speciálním nástrojem s přesnější aritmetikou (*Matlab*).

V demonstraci je použita hodnota x=-1.2596998329023313, na posledním desetinném místě změněná od „správné" hodnoty … 23314, tedy rozdíl je cca $10^{-16}$. Sledujeme-li pohyb odchýlený tak málo od rovnováhy, vidíme, že dlouho vypadá vše v pořádku, ale v čase cca tt=4000, tedy po cca 600 obězích, výpočet selže. To je cílem této demonstrace – ukázat citlivost výpočtu na obecné přesnosti počítače nebo systému. Jemnější krok by také způsobil rozpad, jen za delší dobu. Kdybychom startovali ve „správném" bodě … 23314, výpočet ale bude korektní, a dokonce bez ohledu na volbu *dt*.

Z tohoto příkladu by mělo být znovu zřejmé, že dlouhodobá předpověď tímto způsobem, t.j. jen bezmyšlenkovitě mechanicky nechat pracovat počítač, je prakticky nemožná a vždy je potřeba pečlivé analýzy a nejvyšší opatrnosti.

Lagrangeovy body už umělé družice dosáhly, zejména oba vnější body L2 a L3 v systému Slunce-Země. Kormidelníci těchto sond se o numerické chyby podobných výpočtů musí postarat. Ovšem v praxi jim to vrásky nedělá: poruchy ostatních planet jsou řádově významnější než numerické nepřesnosti. Design drah těchto sond a jejich korekce je potom kombinací numerických a analytických výpočtů a je o něco složitější.

**demo=4.** Počátkem 20. stol. objevili lovci asteroidů několik těles v okolí Lagrangeových bodů L4 a L5 systému Slunce-Jupiter. Potvrdil se tak pěkným způsobem teoretický koncept stability, rozpracovaný několik let před tím. Jsou to dvě proslulé skupiny Trójanů (Řecký a Trojský tábor), které kolísají v periodických oscilacích kolem Lagrangeových bodů. Dnes už je těchto asteroidů známo patrně víc, než bylo všech bojovníků před Trojou.

V této ukázce jsou zvoleny parametry: a = 0.001 (Jupiter/Slunce), x = a - 1/2, y = $\sqrt{3}/2+0.01$, u = v = 0. Částice tedy neleží přímo ve vrcholu rovnostranného trojúhelníku (tedy L4), ale o 0.01 nad ním. Kdyby částice skutečně ležela přímo na vrcholu, nepohnula by se ani v našem numerickém výpočtu a demonstrace by byla jen nudná. Už malá odchylka ale způsobí pohyb, který stojí za průzkum. Částice kolísá kolem Lagrangeova bodu po víceméně periodické dráze. Při volbě trochu jiné počáteční odchylky by nemusela být takto „čistě“ periodická, ale region, v němž obíhá, bude stále omezený – jak si můžete sami vyzkoušet.

Koncept počítání stability vychází z toho, že v okolí rovnovážné polohy dynamického systému ho lze jen infinitesimálně (tedy nekonečně málo) vychýlit a často se zdaří jeho další vývoj spočítat analyticky ve formě rychle konvergující nekonečné řady. To se právě podařilo v případě Lagrangeových bodů. Výsledkem je (dnes už experimentálně ověřený) předpoklad, že kolineární Lagrangeovy body jsou obecně nestabilní, kdežto trojúhelníkové jsou za jistých okolností stabilní. Tomu právě nasvědčuje i tato demonstrace. Dál si můžete vyzkoušet, kam až lze s počáteční odchylkou zajít, aby se částice udržela na stabilní dráze. Kromě toho zkuste ověřit hodnotu a $\simeq$ 0.0385, za níž jsou podle teorie už dráhy kolem bodu L4 nestabilní.

Když si prohlédnete tuto dráhu v režimu swI=1, může vás inspirovat srovnání s detailními fotografiemi Saturnových prstenců pořízených sondou Cassini – určitě mají něco společného :)

**demo=5.** Spočítá dráhu startující kolmo k ose $x$ rychlostí v = -1.42, se zadáním dalšího parametru „yybreak=1“ Výpočet se zastaví při prvním protnutí osy $y$. Když program detekuje přechod přes $y = 0$, dopočítá (tak, že se o jeden krok vrátí a postupně zmenšuje hodnotu $dt$) polohu částice přesně na osu $x$ a v pravém okně ukáže její stavový vektor. Necháte-li demonstraci pokračovat (stisknete mezerník), ukáže program ještě druhou dráhu s mírně odlišnou rychlostí v = -1.43. Všimněte si, že v 1. případě je konečná rychlost $u$ kladná, zatímco v druhém případě je záporná. Odsud lze oprávněně očekávat, že existuje nějaké $v_0 \in < -1.42, -1.43 >$, kdy je konečné $u = 0$. Jednoduchou iterací (za použití trojčlenky) se dá několika pokusy skutečně taková hodnota najít. Jako první iteraci můžete zkusit např.

```
young v=-1.4243
```

Uvidíte, že konečné $u$ je už o dva řády menší a takto můžete pokračovat dál, až se přiblížíte hodnotě ($v_0 \simeq -1.424237$).

Co to znamená? Jestliže dráha přetne osu $x$ zase kolmo, musí být nutně symetrická. Tedy po průletu „2. poloviny“ musí skončit přesně v bodě, ze kterého vystartovala a to i se stejnými rychlostmi. Jinými slovy dráha je periodická a musí se přesně stejně opakovat.

Periodické dráhy jsou v problému tří těles dost důležité. Je to jeden z mála případů, kdy bezpečně známe vývoj dráhy i pro dlouhé časy $t \to \infty$. Jedná se zároveň v určitém smyslu o „rovnovážný“ stav a z takového lze ještě dál posuzovat jeho stabilitu.

Že dráhu lze „odhadem“ považovat za stabilní, je vidět i z názoru, když si graficky prohlédnete demonstraci **demo=6**. Dráha startuje ze stejného místa, ale s rychlostí $v_0 = -1.407$. Věrohodný výpočet stability takové periodické dráhy je poněkud složitější a přesahuje středoškolský matematický aparát. Ale můžete se zamyslet třeba nad tím, jak vlastnost stability souvisí s periodičností a do jaké míry „stabilní“ znamená „přece jen se jednou vrátí“.

Mnozí badatelé soudí, že výzkum periodických drah v problému tří těles může pomoci k jeho řešení. Sami se můžete pokusit nějakou další nalézt. Ukázková periodická dráha je periodická hned po prvním oběhu. Můžete hledat třeba takovou, která musí oběhnout 2x, 3x, atd. než se vrátí do počátečního bodu a prozkoumat tak celé rodiny periodických drah.

**demo=7.** Historická cesta Apolla 8 k Měsíci. Demonstrace je věrnou (i když jistě ne úplně přesnou) simulací dráhy k Měsíci v její 1. fázi a ukazuje citlivost na správné načasování manévrů. Astronauti po startu z Cape Canaveral zaparkovali na kruhové oběžné dráze kolem Země ve výšce 190 km. Při druhém obletu Země (po necelých 3 hodinách od startu) zapálili na 5 minut a 17 sekund třetí stupeň rakety Saturn V, který je urychlil na dráhu k Měsíci. (Třetí stupeň potom odhodili, řídící centrum ho ještě naposledy zažehlo a aby nepřekážel, navedlo ho na heliocentrickou dráhu, kde pravděpodobně krouží dodnes.) Sami astronauti tak dosáhli téměř 2. kosmické rychlosti. Žádní lidé se do té doby nepohybovali vzhledem k Zemi tak rychle a nevzdálili se tak daleko.

Aby všechno běželo podle plánu, museli kritický zážeh provést v pravou chvíli a musel trvat přesně stanovenou dobu. Kdyby motor zažehli o něco dříve nebo o něco později, zřejmě by došlo k prakticky neřešitelným problémům.

V simulaci vidíme 4 trajektorie:

1. je dráha, na kterou by se Apollo dostalo v případě, že by motor byl zažehnut příliš brzy – v nevhodném okamžiku, kdy je Země přesně mezi ním a Měsícem, tedy v našem schematu $y = 0, u = 0$ a $v =$ 2. kosmická rychlost. Počáteční rychlost je tedy kolmá k ose $x$. Je vidět, že kosmická loď odletí beznadějně do hlubin sluneční soustavy.

2. je dráha, kdy astronauti zapálí motor příliš pozdě (o 1/4 obrátky kolem Země později než v předchozím případě). V tomto případě je $y =$ (poloměr Země + 190 km), $x =$ stejné jako pro Zemi, $u$ a $v$ si vymění hodnoty jen $u$ má záporné znaménko. Loď tedy startuje z parkovací dráhy rovnoběžně s osou $x$. Osud astronautů by byl podobně krušný jako v předchozím případě.

3. Motor byl zapálen přesně mezi těmito dvěma polohami. Tedy loď je na své parkovací dráze na ose souřadnic $xy$, absolutní hodnota rychlosti je stále stejná, tedy 2. kosmická rychlost. Tentokrát to dopadlo o něco lépe a loď mine Měsíc poměrně blízko. Nicméně Měsíc je tak lehký, že dráhu ovlivní jen minimálně. Astronauti by tedy museli včas a velmi silně zabrzdit, aby nezahynuli.

Je zřejmé, že všechny tři dráhy jsou velmi podobné, jen poněkud jinak pootočené. Protože Měsíc má na dráhu (vyjma velmi těsného průletu) opravdu jen nepatrný vliv, je to v podstatě parabola se Zemí v ohnisku. Při hrubém výpočtu šlo jen o to, aby její rameno zasáhlo přibližně Měsíc. Jemné doladění se potom týká hlavně optimalizace brzdícího manévru.

Před urychlením na 2. kosmickou rychlost je třeba vzít v úvahu, že oběžná doba na parkovací dráze je cca 90 minut, takže mezi 1. a 2. katastrofickým scénářem v naší simulaci uběhne pouze cca 22 minut; správný okamžik je někde mezi a je jasné, že jde o vteřiny.

Kdyby u 3. dráhy selhal brzdící motor v blízkosti Měsíce, loď by byla – jak je zřejmé – ztracena. Můžete si vyzkoušet (a je to snadné) najít na parkovací dráze takové startovací místo, ze kterého by loď prolétla kolem Měsíce tak šikovně, že by se zase vrátila k Zemi i bez motorů. Vezměte v úvahu, že Měsíc je cca 81x lehčí než Země (a=0.01215), je vzdálen 384 400km, poloměr parkovací dráhy kolem Země je (6378+190)km tedy 0.017086. Druhá kosmická rychlost v absolutní hodnotě je 10.7533. (našich relativních jednotek M/SEC).

Jestliže byl úhel startovací pozice na kruhové parkovací dráze počítaný od osy $x$ v první ukázce $0°$, v druhé $90°$ a ve třetí $45°$, prozkoumejte dráhy, které k Měsíci zrychlí v úhlu $43°$ nebo o úhlové minuty menším.

4. dráha v této ukázce startuje z parkovací dráhy pod úhlem $42.9°$. Evidentně je velmi riskantní, protože téměř narazí do Měsíce, ale kdyby vše šlo podle plánu, ohne Měsíc raketu na zpáteční cestu k Zemi. (Něco podobného muselo řešit Apollo 13.)

Když se na tyto návratové dráhy podíváte v inerciální soustavě (v režimu swI=1), jistě oceníte odvahu 24 astronautů, kteří toto dobrodružství podnikli, tři z nich dokonce 2x.

Pro zajímavost ještě můžeme připomenout hodnoty z archivu NASA: při brzdění u Měsíce běžel hlavní motor Apolla 4 minuty a 13 vteřin, při odletu od Měsíce 3 minuty a 23 vteřin.

**demo=8.** Lagrangeův bod L1, tedy ten, který leží uprostřed mezi primáry, hraje kritickou roli ve fyzice atmosfér dvojhvězd. Pokud se v tomto bodě ocitne osamělá částice a je v klidu, teoreticky v klidu i zůstane. U hvězd s rozsáhlými atmosférami se v Lagrangeově bodě mohou ocitnout molekuly plynu. Ty mají nějaký tepelný pohyb, řekněme, že je víceméně náhodný a jeho rychlost v absolutní hodnotě je malá. V demonstraci je ukázáno, co se stane s takovou molekulou, když má náhodnou malou rychlost směrem k těžší hvězdě.

Poměr hmotností je 3:1, souřadnice L1 x=-0.360743 a u=0.01. Částice několikrát oběhne těžší hvězdu a je zřejmé, že nemá dost energie na to, aby opustila jakousi bublinu, tedy oblast obklopující těžší primár. V čase přibližně tt=45, při jednom ze svých návratů do L1, se přece jen ze sféry vlivu těžší hvězdy vymaní a do „své“ bubliny si ji přitáhne lehčí hvězda. Po zbytek výpočtu už zůstane v menší bublině. Pro odlišení je zvolen limit věrohodnosti výpočtu trochu hrubší (ale stále ještě dostatečný), aby trajektorie kolem lehčí hvězdy byla červená. Opět je vidět, že molekula nemá dost energie, aby se vymanila z dovolené oblasti. Tuto červenou oblast vidíme dost zřetelně a její kontura se nazývá Hillova křivka (nebo také plocha, pokud počítáme v třírozměrném prostoru). Je to obecně křivka, na níž je hamiltonián částice konstantní. Je hranicí mezi oblastmi, kam částice může nebo naopak nesmí. I to je cenná informace, protože kam smí *přesně* nevíme (neumíme totiž problém tří těles vyřešit). Hillova křivka, která prochází bodem L1, se nazývá **Rocheova mez** a v astrofyzice a astronomii se s ní setkáváme velmi často. Jistě jste o ní slyšeli v souvislosti s rozpadem těles, které padají na Slunce nebo na nějakou planetu.

Je-li totiž hodnota $a$ velmi malá, řekněme $10^{-10}$, (to může být např. kometa nebo asteroid, který prolétá kolem Jupiteru) a jsou-li oba primáry dostatečně blízko sebe, nachází se bod L1 uvnitř malého tělesa. Tím se jeho okrajová část ocitne ve sféře vlivu velkého tělesa a to má tendenci si tu část přitáhnout k sobě. Následně dojde k pnutí, které může vést až k rozpadu menšího tělesa, není-li dost pevné. V červenci 1993 jsme poprvé takový pád mohli pozorovat takřka v přímém přenosu. Když byla kometa Shoemaker-Levy objevena několik měsíců před svým pádem na Jupiter, byla už roztrhaná asi na 20 kusů. Předpokládá se, že kometu Jupiter zachytil na několik desetiletí, kdy se postupně drolila. Ve finální fázi pak všechny úlomky pohltil během několika minut.

**demo=9.** Demonstrace ukazuje jednu z prvních známých (netriviálních) periodických drah v restringovaném problému. Je to takříkajíc muzeální exponát z roku 1897. Už dávno před tím se vědělo, že určitý integrál je obecně možné vypočítat alespoň numericky, pokud to nejde jinak. Simpsonovo pravidlo nebo Eulerem navržená metoda přibližného řešení diferenciální rovnice byly známy už v 18. století.

George Darwin, slavný syn ještě slavnějšího otce – biologa Charlese – velmi silně toužil vidět, jak dráhy těles restringovaného problému skutečně vypadají. Vypracoval si vlastní numerickou metodu a pustil se do pracného počítání. Nepíše, kolik lidí na projektu zaměstnal, ale v obsáhlé a obdivu hodné publikaci *Periodic Orbits* můžeme číst povzdech „But unfortunately the trained computer, who is also a mathematician, is rare.“ Je zřejmé, že slovo „computer“ bylo před 100 lety rodu životného.

Darwin se rozhodl zkusit najít nějaké periodické dráhy v systému, v němž poměr hmotností primárů je 1:10. Grafy některých z nich jsou ukázány v jeho článku. Ta z nich, která krouží po hezky propletené dráze „za Jupiterem“ se ukáže při volbě demo=9.

V naší demonstraci je výpočet proveden v 40 milionech kroků. Je to přehnaná přesnost, můžete si vyzkoušet, že by bylo určitě dostatečné jen např. 40 tisíc a ještě méně (z příkazové řádky dejte třeba „young demo=9 dt = 0.0001 dtscan = 100“). V metodě RK4 každý krok ale znamená vypočítat minimálně 12x odmocninu a řádově 100 násobení nebo dělení. Je zřejmé, že Darwin takto postupovat nemohl, ostatně ani metoda RK4 nebyla v té době ještě známá. Ale ani počítače nejsou všemocné; když chtějí dnešní badatelé alespoň trochu věrohodně spočítat dráhy na škále milionů let, musí vymyslet lepší metodu než RK4, ovšem šitou na míru přesně nebeské mechanice podobně, jak to musel udělat George Darwin.

**demo=10.** Jistě jste slyšeli o inkvizičním procesu s Galileem v roce 1633. Jistě také víte, že v něm (zhruba řečeno) šlo o to, zda obíhá Slunce kolem Země nebo obráceně. Určitě znáte dnešní výklad, že Země i Slunce obíhají kolem společného těžiště, a to prakticky splývá se Sluncem, protože to je řádově asi milionkrát těžší než Země. Uměli byste tento dnešní názor sami před římskými církevními censory obhájit?

Stačilo by například argumentovat tím, že Venuše mění fáze svého srpečku? Nebo že se Mars při opozici se Sluncem pohybuje zpětně? Když budete dost kritičtí k ukvapeným závěrům, třeba začnete váhat, jestli Galileovi soudci nakonec snad možná neměli pravdu.

Každopádně při demonstraci č. 10 si můžete prohlédnout dráhu planety s přibližnými parametry Marsu, jen s poněkud zvýrazněnou excentricitou. V ukázce je rovnou zvoleno a=0., takže žluté Slunce leží nehybně ve středu vesmíru. Mars obíhá kolem něj po růžici, to jest po skutečné dráze, kterou můžete ze Země naměřit nebo pozorovat. Podobnou dráhu (Marsu) publikoval i Kepler ve své Astronomia Nova. Stejnou růžici také určitě naměříte i v případě, že Země je nehybná a Slunce krouží kolem ní. Stačí posunout souřadný kříž do červeného bodu. Kde je ovšem eliptická dráha, o které se učí ve škole?

Stačí stisknout na klávesnici písmeno I a celý výpočet se ukáže z hlediska inerciální soustavy. Nyní už je dráha Marsu pěkně eliptická a červená Země poslušně obíhá kolem Slunce po kruhové dráze. Kepler sice pojem „inerciální soustava" nepoužíval, ale fakticky pracoval se stejným aparátem *firmamentu*, tedy nepohyblivého pevného (později absolutního) prostoru, který ztotožnil s hvězdami. Ty se nám, lidem, jeví stále na stejných místech ve svých souhvězdích.

Často se říká, že z hlediska inerciální soustavy je pohyb těchto tří těles „jednodušší". Samozřejmě by to mohli říkat jen ti, kteří by uměli „jednoduchost" nějak změřit. Takže nyní to vypadá, že by mohla Země obíhat kolem Slunce. Stačí dokázat, že inerciální soustava existuje. Zkusíte to? Nebudete první. Mnozí ale po zkušenostech s tímto oříškem doporučují o inerciálních soustavách raději vůbec nemluvit … a smířit se s tím, že odpovědí na tuhle otázku se při pozorování přírody nesmíme nechat ovlivňovat.

## 13. Závěrem

Jako inspirace by to pro začátek mohlo stačit, pokud nechceme tento komentář proměnit na tlustou knihu. Dál by bylo správné alespoň nastínit, kam pokračovat.

Kdo se chce tímto problémem zabývat podrobněji, musí především trochu zdokonalit své matematické znalosti nad rámec jen obyčejného diferenciálního počtu. Krom toho je vždy cenné si přečíst, co o tom soudí jiní. Toho je ovšem tolik, že na to jeden život nestačí. Úspěch může mít pouze ten, kdo umí vybrat to užitečné.

Další studium se může dělit zhruba na dvě cesty. Hloubavější povahy se mohou pokusit Problém rovnou vyřešit – protože tři tělesa se skutečně pohybují, řešení určitě existuje. Statisticky vzato, pravděpodobnost že se to podaří, je malá. Hledání vzorce ve tvaru nějaké dobře konvergující řady není moc nadějné, protože existuje množství uznávaných důkazů, které takovou formu zpochybňují. (H. Bruns, H. Poincaré a další). Ačkoliv diskuze o tom není zdaleka uzavřená, v úvahu připadají ještě divergentní řady nebo eventuálně vynález nějakého nového nevídaného matematického instrumentu. Nebo je možné se pokusit problém tří těles od základu přeformulovat, aby byla nějaká naděje ho definitivně vyřešit. Je to nejistá cesta podobná procházce bludištěm. Po únavném putování se můžete náhle ocitnout v místě ze kterého jste vyšli. Pozorný čtenář předchozího textu jistě vycítil, že se zde zdůrazňuje tzv. *Machian insight.* Čili zkoumání přírody tak, že na počátku důsledně vyjdeme jenom z toho, co naše smysly mohou vnímat a dopředu se oprostíme od všech umělých spekulací. Teprve na základě zkušenosti a experimentu, skutečného nebo třeba jen myšlenkového, vybudujeme teorii. Dobrou motivací pro začátek mohou být pojednání E. Schrödingera nebo E. Macha vycházející z předpokladů, že hmotnost je jen číslo, které pouze vstupuje do výpočtů a nemusí zůstávat konstantní, jak to klasické představy požadují. Stejně poslouží pokročilejší úvahy H. Poincaré vedené v tomto duchu nebo z nedávné doby celá konstrukce tzv. relační mechaniky (Relational Mechanics).

Druhá možnost pro dravější a praktičtější povahy je pustit se do bezbřehého množství úloh, které se budou řešit numericky na počítacích strojích. Problém tří těles i ve své nejjednodušší restringované verzi nabízí řadu zesložitění: především výpočet ve třech dimenzích, dále základní dráhy primárů nebývají kruhové, ale eliptické nebo ještě složitěji deformované (jako např. dráha Měsíce kolem Země). Dále může jít o rozměrná, ne úplně kulová tělesa, namísto hmotných bodů. Primární tělesa také mohou mít proměnnou hmotnost (např. těsné dvojhvězdy). Při meziplanetárních letech se může započítat např. tlak záření u vesmírných plachetnic, stejně tak při studiu pohybu prachových částic. Meziplanetární sondy mohou používat iontové motory, které jim permanentně dodávají energii, což silně ovlivní možnosti jejich manévrování. Při studiu pohybu Saturnových prstenců je třeba vzít do úvah vzájemnou rázovou interakci mezi kameny, které ho tvoří. A tak dále.

Možná největší kapitola se odvíjí od studia periodických řešení a jejich stability, což vede k široké teorii rezonancí. Jednak orbitálních rezonancí, jejichž nejznámějším příkladem jsou Kirkwoodovy mezery – Jupiter nedovolí obíhat asteroidům na drahách s oběžnou dobou v poměru 2:1 nebo 3:1 vůči oběžné době Jupiteru. Stejný jev se intenzivně studuje u Saturnových prstenců. Ostatně tři velké Jupiterovy měsíce Io, Europa a Ganymedes obíhají v rezonanci 1:2:4. Kromě toho se studuje i spin-orbitální rezonance: z problému dvou rotujících těles (což je vlastně případ tří těles) je nejznámější vázaná rotace našeho Měsíce 1:1 nebo Merkuru 3:2. Záhadná je rezonance rotace Venuše kolem vlastní osy s oběžnou dobou Země 3:2; hypotéza, která je ale asi nad rámec problému tří těles.

To je ovšem jen restringovaný problém: všechno bude mnohem komplikovanější, když jsou všechna tři tělesa srovnatelně velká. Milovníci vysokých rychlostí se mohou zabývat vlivem elektromagnetických efektů. Nakonec jsou tu relativisté, kteří by rádi spočítali efekty kolem černých děr nebo rychle rotujících masivních kvasarů.

A když se tohle všechno jednou spočítá, bohužel se zjistí, že tělesa ve vesmíru nejsou jen tři, ale nejméně čtyři, možná i pět, šest … a tak dál; jestli do nekonečna, to si nejsme jisti.

··· Konec ···

### Dodatek 1: Problém dvou těles

Aby představa o problému tří těles byla úplnější, měli bychom ještě alespoň zmínit jak se řeší problém dvou těles. V newtonovské koncepci – tedy s předem danými hmotnostmi a souřadnicemi – je zvláštním případem problému tří těles (jedno z těles má nulovou hmotnost). Mnohokrát jsme v předchozím textu zmínili, že problém dvou těles je jednoduchý v tom smyslu, že jeho řešení dokážeme kompletně a s jistotou najít. Nebudeme zde řešení zdůvodňovat, ukážeme jen stručně jak vypadá.

Správně bychom samozřejmě měli popsat pohyb každého tělesa zvlášť, tedy časový vývoj souřadnic $x_1 = x_1(t), y_1 = y_1(t)$, totéž pro $(x_2, y_2)$. Gravitace způsobí pohyb dvou těles vždy jen v rovině, vystačíme tedy jen se dvěma souřadnicemi pro každé těleso. Výpočet se ale provádí tak, že se jedno těleso umístí do počátku souřadnic a v něm zůstane nehybné, čili souřadný systém je s ním spojen. Tím se popis zjednoduší vlastně jen na pohyb jednoho tělesa. Je jedno, jaký typ souřadnic zvolíme, kvůli přehlednosti se většinou pracuje v polárních souřadnicích $(r, \varphi)$, pokud někdo chce pracovat v kartézských souřadnicích $(x, y)$, může si je přepočítat podle jednoduchých vzorců:

$$\begin{aligned} x &= r\ cos\ \varphi \\ y &= r\ sin\ \varphi \end{aligned} \qquad \text{(neboli)} \qquad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= atan\ \tfrac{y}{x} \end{aligned}$$

Následující vzorce vymyslel Kepler, který se především potýkal s nalezením funkce $\varphi = \varphi(t)$, jelikož tu právě mohl porovnávat se svým měřením (na rozdíl od $r = r(t)$). Úhel $\varphi$, kterému se z historických důvodů říká *pravá anomálie*, se nedařilo vypočítat přímým dosazením hodnoty času $t$ do nějakého vzorce a standardní postup tuto potíž obchází jedním mezikrokem. Nejprve se proto hledá kořen tzv. *Keplerovy rovnice*

$$E - e\ \sin E = a^{-\frac{3}{2}} t$$

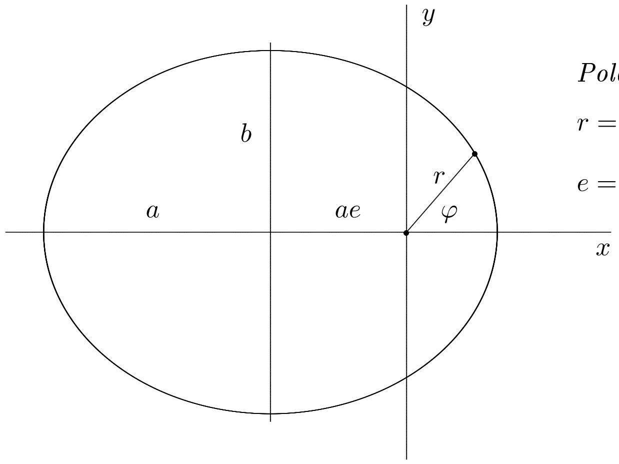
v němž $E$ je neznámá a historicky se jí říká *excentrická anomálie*, a je to v podstatě zjednodušující substituce za $\varphi$. $(a, e)$ jsou předem dané parametry elipsy, $t$ je čas.

Rovnice se vyřeší pohodlně numericky (snadno např. iterací), a výhoda je v tom, že hodnotu kořene můžeme nalézt jednoznačně a s libovolnou přesností.

(Analytické řešení v principu zapsat lze – jako nekonečný součet tzv. Besselových funkcí, to ale přesahuje obzor střední školy. Přesahuje pravděpodobně také Keplerovy zkušenosti; je totiž nutná velmi citlivá analýza konvergence nekonečných řad a ta v Keplerově době nebyla známá.)

Je-li známo $E$, pak už přímou cestou stanovíme dvojici polárních souřadnic

$$r = a\,(1 - e\ \cos E); \qquad \varphi = 2\,\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\ tan\ \frac{E}{2}$$




*Polární rovnice elipsy*

$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}$

$e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

Toto je parametrické vyjádření elipsy s velkou poloosou $a$ a excentricitou $e$. O tom se můžete snadno přesvědčit, když si odvodíte, že $\cos E = \frac{\cos\varphi+e}{1+e\cos\varphi}$ a z posledních dvou rovnic $E$ vyloučíte. Podobně se postupuje pro parabolické a hyperbolické dráhy, kde $e \geq 1$.

O trochu obtížnější cvičení si můžete dopřát alespoň tím, že se přesvědčíte zkouškou, že platí pohybové rovnice

$$\ddot{x} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}^{\,3}} \qquad \ddot{y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}^{\,3}}$$

Práci ulehčí, když si předem uvědomíte, že

$$\cos\varphi = \frac{\cos E - e}{1 - e\ \cos E} \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{1-e^2}\ \sin E}{1 - e\ \cos E}$$

Dál už stačí jen chvíli mechanicky derivovat složené funkce. Vemte v úvahu, že jestliže $x = a(\cos E - e)$, potom $\dot{x} = -a\ sinE\ \dot{E}$ ; $\dot{E}$ získáte přímo z Keplerovy rovnice jako $\dot{E} = 1/(a^{3/2}\ (1 - e\cos(E)))$.

Pokud se ptáte, jak to, že v řešení vystupují jen 2 konstanty $(a, e)$ zatímco by měly být 4, ptáte se správně. Další 2 se formálně vynechávají: první z nich je čas na hodinách v okamžiku průchodu perihelem (t.j. bodem na elipse, který je nejblíže ohnisku, tedy kdy je $E = \varphi = 0$) a klade se roven 0. Druhou je otočení osy elipsy v souřadném systému, které se také klade rovné 0, takže delší osa elipsy obvykle splývá s osou $x$.

### Dodatek 2: Diferenciální trojúhelník a derivace

Víte „kolik andělů se vejde na špičku jehly“? Je to otázka, která se občas slýchává, většinou v posměšně podbarveném tónu, jakými že to nesmysly mařili čas středověcí teologové. Povědomost o ní pochází evidentně ze základní scholastické knihy *Theologická Summa* (1274), jež je jedním z pilířů křesťanské vzdělanosti. V ní je přímo postavena otázka (1.52.3) „Zda může býti (zároveň) více andělů na témž místě.“ Autor traktátu Tomáš Akvinský odpovídá, že jen jeden. Otázka je důležitá a hlavně zapeklitá: špička jehly symbolizuje bod, jehož velikost není dost dobře měřitelná. Pocitově si ale představujeme něco hodně „malého“, nebo něco, co můžeme v jistém smyslu libovolně zmenšovat. Podobně andělé (aby je mohli lidé svými smysly vnímat) na sebe přijímají nějakou velikost, ale ta je rovněž libovolná, zejména libovolně malá. Když chceme počet andělů vypočítat, měli bychom určit poměr (zlomek) velikosti špičky jehly děleno velikostí anděla. Čitatel ani jmenovatel nejsou ale veličiny měřitelné obvyklými čísly, což je problém.

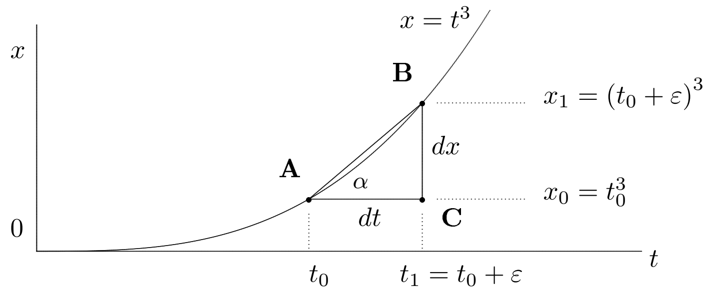
Otázku je ale samozřejmě třeba číst v symbolickém smyslu. Doslovný překlad řeckého slova *angelos* – anděl, je posel. Ve středověké filosofii se jím rozumí posel, který jako **příčina** může zprostředkovat vůli k proměně od nadřízené pevné **neměnné** mocnosti. Tou mocností může být u Aristotela prvotní hybatel, u theologů Bůh, v řecké archaické mythologii ji můžeme bezpochyby ztotožnit s Hestií (jak již zmíněno v 2. kapitole) – i zde je nerozlučně spjata s Hermem jako božským poslem. Typickou fyzikální proměnou je změna místa, tedy pohyb, a k této změně je třeba nějaké příčiny. Příčin je mnoho (viz. 5. kapitola), ale tvoří řetězec a na konkrétním místě – na špičce jehly – působí nakonec jen jedna, ostatní jsou už jen příčiny příčin a na špičce jehly nejsou přítomné.

Svobodomyslní theologové a filosofové ovšem nečetli jen Tomáše Akvinského nebo Aristotela; hlavním pramenem poznání jim byl odkaz antické geometrie – Apollónia, Eukleida, Aristarcha a mnoha dalších. Geometrie je úhelným kamenem, na němž se láme pohled na svět a promluvila i do zdánlivě nesmyslné otázky o andělích a jehle. Když se podařilo nějakým způsobem zobrazit geometricky pohyb, ocitla se odpověď překvapivě blízko. Pohyb je změna místa v čase a stačí pojmout čas jako přímku – jednu souřadnici, místo (nějakou vzdálenost) jako druhou souřadnici a výsledně znázornit pohyb jako nějaký graf, tedy křivku, tedy množinu bodů.

Bod sám o sobě křivku netvoří, ale má-li být její součástí, musí mít nějaký vztah k jejím ostatním bodům. Je to opět řetězec vztahů, na prvním místě je to vztah ke svému sousedu, ten má vztah s dalšímu sousedu, atd. Geometr si položí otázku, jaký je **geometrický** vztah těchto sousedů a po ruce je přirozená odpověď – je to jejich spojnice, tedy úsečka.

Když budeme znát geometrické vlastnosti této úsečky, budeme nahlížet přímo do podstaty zkoumané křivky. O délce úsečky nemůže být ani řeči. Víme jen, že není záporná, jinak se může zmenšovat podle libosti tak, jako se dokáže jakkoliv zmenšit anděl. Z geometrických vlastností nám potom zbývá její směr; rovněž pro anděla je zásadní právě to, odkud přichází a kam míří.

Stojíme tak tváří v tvář konkrétní geometrické úloze, jak určit směr tečny k dané křivce v daném bodě. Otázka, jak precizně určit tečnu ke křivce, začala být palčivá přibližně před polovinou 17. století v souvislosti se zeměměřičstvím a s předpovídáním pohybů (zejména dělových projektilů). Zabývali se jí Italové, Francouzi, Holanďané, Belgičané ... Nakonec to byl Isaac Barrow, který řešení velmi přehledně shrnul. Ve svých Geometrických Přednáškách, kapitola X., publikovaných 1670, navrhl tento postup: (vyloženo podle dnešních sémantických zvyklostí)




Zkusme zjistit, jak strmá je tečna kupříkladu ke konkrétní křivce $x = t^3$ v nějakém jejím bodě $A$. K tomu potřebujeme sestrojit nějakou úsečku, tedy potřebujeme ještě další bod. Nechť je to bod $B$, ležící rovněž na křivce. Jestliže bude dost blízko bodu $A$, bude sklon úsečky $AB$ prakticky stejný jako sklon tečny; čím budou body $A$, $B$ k sobě blíž, tím bude rozdíl mezi naším schematem a realitou menší. Body $ABC$ tvoří trojúhelník, Barrow ho nazývá „rozdílový trojúhelník“ a jednoduše v něm můžeme spočítat tangens úhlu $\alpha = \angle BAC$. Rozdílový je proto, protože jeho odvěsny tvoří rozdíly souřadnic sousedních bodů. V dnešní notaci se rozdíl označuje předřazením symbolu $d$ před objekt o jehož rozdílu je řeč. Tedy $dt = t_1 - t_0$, $dx = x_1 - x_0$ ($dt$ i $dx$ jsou samostatné symboly, není to součin $d$ a $t$, jak by se mohl někdo mylně domnívat.)

V literatuře se písmenem $\varepsilon$ označuje takové kladné číslo, které je menší, než si jakkoliv dovedeme představit. Použijeme ho zde pro symbol $dt$ a můžeme ihned psát:

$$\tan\alpha = \frac{dx}{dt} = \frac{(t_0+\varepsilon)^3 - t_0^3}{\varepsilon} = \frac{3t_0^2\varepsilon + 3t_0\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{\varepsilon}$$

Nyní přichází klíčový obrat v úvaze. Jestliže mají být body $A, B$ k sobě co nejblíže, musí být $\varepsilon$ co nejmenší. Je jasné, že $\varepsilon^2$ bude mnohem menší než $\varepsilon$, právě tak $\varepsilon^3$, a pro další výpočet se tyto členy zanedbají jako by neexistovaly. Tím se dosáhne toho, že v čitateli zlomku zůstanou jen členy v součinu s $\varepsilon^1$, to se vykrátí proti jmenovateli a vzorec pro $\tan\alpha$ se stane na $\varepsilon$ nezávislý. Tedy po tomto zjednodušení píšeme:

$$\tan\alpha = 3\ t_0^2$$

Takový obrat můžeme z geometrického hlediska udělat prakticky vždy. Výraz $\tan\alpha$ se nazývá derivace a označuje se jako $\dot{x}$. (Tečka se obvykle použije, když argumentem funkce je čas, pokud vyšetřujeme obecně funkci $y = y(x)$, derivace se označuje čárkou, tedy $y' = dy/dx$.)

Metodu publikoval Barrow 1670. Nebyla ale zcela nová, podobně uvažovali už před ním Cavalieri, Fermat, Sluse nebo Wallis a Gregory a zřejmě řada dalších. Newton ji velmi účinně uvedl do života ve fyzice a astronomii. Barrow a Newton byli blízcí přátelé a je zřejmé, že Barrow se na Newtonově díle zásadním způsobem podepsal. Nejen zavedením derivace, ale hlavně koncepcí absolutního času a prostoru.

Idea rozdílového trojúhelníku je patrně původní motivací pro zavedení diferenciálního počtu do fyziky. Pro úlohy teoretické (tedy i nebeské) nebo kvantové mechaniky se později používá v abstraktnější formě.

Barrow sám prožil poměrně dobrodružný život. Pocházel z dobře zajištěné rodiny obchodníka se suknem, který měl blízko ke králi. Prvotřídního vzdělání se mu dostalo v Cambridge, kde zůstal až do svých pětadvaceti let. Kvůli politickým hrozbám protektorátu svoji Alma Mater na čtyři roky opustil a následoval svého otce do Paříže, kam se uchýlil celý anglický královský dvůr. Ve Francii pobyl několik měsíců, právě tak jako ve Florencii. Je téměř jisté, že na těchto dvou místech našel rozhodující inspiraci k výpočtu tečen. Dál se na své velké cestě plavil z Livorna do Smyrny a na moři musel podstoupit boj s alžírskými piráty.

Další dva roky strávil ve Smyrně a Cařihradu studiem v tamních knihovnách. Na zpáteční cestě shořela v benátském přístavišti jeho loď i se všemi zavazadly. Z Benátek dorazil do Londýna prakticky pěšky. V Anglii mezitím začínala restaurace Stuartovců a Barrow začal stoupat po společenském i vědeckém žebříčku. V Cambridge nechal na své náklady postavit velkorysou knihovnu a velmi dbal na pozdvižení úrovně výuky matematiky a zejména řečtiny, kterou k tomu považoval za nezbytnou. Byl uznáván jako jeden z nejznamenitějších intelektuálů nejen v Cambridge, ale v celé Anglii. Zemřel v Londýně nešťastnou shodou okolností ve svých 47 letech stižen vyčerpávající horečkou, když zřejmě špatně odhadl dávkování léku.

**Dodatek 3: Jádro routiny RK4**

Jako ukázku ještě uvedeme jádro počítačové routiny, která z počátečních podmínek $(x, y, z, u, v, w)$ při zadaných parametrech $(a, b)$ pohne částicí v čase $dt$. Pokud máte chuť si celý problém naprogramovat sami, uvidíte, že to zas tak těžké není a můžete svoji verzi porovnat s následujícím kódem:

```
double rab(double x, double yz)
{
     double dbl;
     dbl = sqrt(x*x + yz);
     return( dbl*dbl*dbl );
}

double vr(double a, double b, double r1, double r2)
{
     return( b/r1 + a/r2 );
}

double vx(double a, double b, double x, double r1, double r2)
{
     return( b*(x-a)/r1 + a*(x+b)/r2 );
}

double hamiltonian(double a, double b, double x, double y, double z,
                   double u, double v, double w)
{
     double r1, r2, yz;
     yz = y*y + z*z;
     r1 = sqrt( (x - a)*(x - a) + yz);
     r2 = sqrt( (x + b)*(x + b) + yz);
     return(.5 * (u*u + v*v + w*w - x*x - y*y) - b/r1 - a/r2);
}

  ...
double ax1, ay1, az1, au1, av1, aw1, ax2, ay2, az2, au2, av2, aw2;
double ax3, ay3, az3, au3, av3, aw3, ax4, ay4, az4, au4, av4, aw4;
double v1, r1, r2, xp, yp, zp, ryz;
double a, b, x, y, z, u, v, w;
```

```
...

b = 1. - a;

 //initial vector (x, y, z, u, v, w) at a time = tt

ryz = y*y + z*z;
r1 = rab(x - a, ryz);
r2 = rab(x + b, ryz);
v1 = vr(a, b, r1, r2);
ax1 = u * dt;
ay1 = v * dt;
az1 = w * dt;
au1 =  dt * ( 2.*v + x - vx(a, b, x, r1, r2));
av1 =  dt * (-2.*u + y - y*v1);
aw1 = -dt * z*v1;

xp = x + .5*ax1;
yp = y + .5*ay1;
zp = z + .5*az1;
ryz = yp*yp + zp*zp;
r1 = rab(xp - a, ryz);
r2 = rab(xp + b, ryz);
v1 = vr(a, b, r1, r2);
ax2 = dt * (u + .5*au1);
ay2 = dt * (v + .5*av1);
az2 = dt * (w + .5*aw1);
au2 =  dt * ( 2.*v + av1 + xp - vx(a, b, xp, r1, r2));
av2 =  dt * (-2.*u - au1 + yp - yp*v1);
aw2 = -dt * zp * v1;

xp = x + .5*ax2;
yp = y + .5*ay2;
zp = z + .5*az2;
ryz = yp*yp + zp*zp;
r1 = rab(xp - a, ryz);
r2 = rab(xp + b, ryz);
v1 = vr(a, b, r1, r2);
ax3 = dt * (u + .5*au2);
ay3 = dt * (v + .5*av2);
```

```
az3 = dt * (w + .5*aw2);
au3 =  dt * ( 2.*v + av2 + xp - vx(a, b, xp, r1, r2));
av3 =  dt * (-2.*u - au2 + yp - yp*v1);
aw3 = -dt* zp*v1;
xp =x + ax3;
yp =y + ay3;
zp =z + az3;
ryz = yp * yp + zp * zp;
r1 = rab(xp - a, ryz);
r2 = rab(xp + b, ryz);
v1 = vr(a, b, r1, r2);
ax4 = dt * (u + au3);
ay4 = dt * (v + av3);
az4 = dt * (w + aw3);
au4 =  dt * ( 2.*(v + av3) + xp - vx(a, b, xp, r1, r2));
av4 =  dt * (-2.*(u + au3) + yp - yp*v1);
aw4 = -dt * zp*v1;

  //shifted vector (x, y, z, u, v, w) at the time = tt + dt

x = x + (ax1 + 2.*ax2 + 2.*ax3 + ax4)/6.;
y = y + (ay1 + 2.*ay2 + 2.*ay3 + ay4)/6.;
z = z + (az1 + 2.*az2 + 2.*az3 + az4)/6.;
u = u + (au1 + 2.*au2 + 2.*au3 + au4)/6.;
v = v + (av1 + 2.*av2 + 2.*av3 + av4)/6.;
w = w + (aw1 + 2.*aw2 + 2.*aw3 + aw4)/6.;

h = hamiltonian(a, b, x, y, z, u, v, w);

  ...
```

Literatura:

Pro zájemce, který se bude chtít zabývat problémem tří těles hlouběji, je následující seznam jen orientačním vodítkem. Uvedeny jsou některé publikace, které se k předchozímu textu vztahují nebo s ním alespoň tematicky souvisí. Většinou vyžadují pokročilejší znalosti, čili to není „doporučená literatura“. Zároveň se úmyslně chci vyhnout dlouhému vyčerpávajícímu seznamu, takže výčet titulů je spíše inspirativní.

Na okraj připomínám, že v úvodních kursech na vysokých školách se teoretická mechanika obvykle začíná klasickou knihou Cornelia Lanczose: The Variational principles of Mechanics nebo také českým překladem tenké knížky J.W.Leech: Klasická mechanika (překlad Jiří Kracík). Podobně pro začátek nebeské mechaniky studenti obvykle berou do ruky Forest R. Moulton: An Introduction to Celestial Mechanics.

Newton, Isaac: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687).
V originále jsou Principia latinský text, vydaný během Newtonova života celkem 3x v mírně modifikovaných verzích. Přeložen do angličtiny (Andrew Motte (1729), novodobá revise Florian Cajori). Pro současného čtenáře obtížně čitelné kvůli „geometrické“ argumentaci. Dnes se většinou citují hlavně pasáže ze 28 stran úvodního exposé.

Originál : http://www.gutenberg.org/files/28233/28233-pdf.pdf
Angl.překlad : http://web.mit.edu/jwk/www/docs/Cohen-Whitman%201999%20Principia.pdf

Barrow, Isaac: *Geometrical Lectures* (1670).
Anglický překlad latinského originálu, James M.Child (1916). Důležité pro toho, kdo chce pochopit kořeny Newtonova díla. Čtenář může být překvapen, co všechno Newton od svého učitele zdědil.

https://archive.org/stream/geometricallectu00barruoft#page/112/mode/2up

Kepler, Johannes : *Astronomia Nova* (1609).
Poměrně obsáhlé dílo (cca 400 stran) v originále latinsky, existuje anglický překlad William H. Donahue (1992) a také cca 100 stránkový výběr od stejného překladatele. Přehlednější je možná *Keplerova Epitome of Copernican Astronomy*, angl. překlad Charles G. Wallis (1952)
Pro seznámení s Keplerovým myšlením existuje vynikající český překlad posledního uzavřeného Keplerova díla *Sen neboli Měsíční astronomie* (Alena a Petr

Hadravovi 2004) a další českou knihou zaměřenou spíše historicky je Zdeněk Horský: *Kepler v Praze* (1980).

Mach, Ernst : *Die Mechanik in ihrer Entwicklung : historisch – kritisch dargestellt* (1883).
K tématu stačí číst Kapitola II (5 – 7), samozřejmě stojí za to přečíst knihu celou. Existuje často užívaný anglický překlad: The Science of Mechanics, překlad Thomas J. McCormack, s úvodem Karla Mengera.

Německý originál: https://archive.org/stream/diemechanikinih05machgoog #page/n226/mode/2up
Anglický překlad: http://isites.harvard.edu/fs/docs/ icb.topic1068951.files/Mach.pdf

Barbour, Julian B. : *The Discovery of Dynamics* (1989).
Jedinečná kniha, v podstatě moderní pokračování E. Macha, kritika základů dynamiky, rovněž z relativistického hlediska.

Barbour, Julian B., Pfister, Herbert : *Mach's Principle* (1995).
Sborník řady příspěvků, většinou z relativistického okruhu. Zvláštní pozornost zasluhuje článek E. Schrödinger: *The Possibility of Fulfillment of the Relativity Requirement in Classical Mechanics.*

Barrow-Green, June: *Poincaré and the Three Body Problem* (1997).
Pokročilé čtení. Poincaré je jedním z největších znalců problémů tří těles, svou argumentaci opírá především o ohromnou matematickou erudici, těžko zpochybnitelnou. Sám spíše opatrným kritikem (viz. spory o teorii relativity); podobný přístup jako E.Mach. Populární a velmi vlivný článek *Science and Hypothesis* (1902) (La Science et l'Hypothèse), vše vysvětlováno bez matematiky. Podobně v češtině velmi pěkný výbor Jiřího Fialy – Poincaré, Henri : *Číslo – prostor – čas* (2010).

Anglicky: http://strangebeautiful.com/other-texts/poincare-science-hypothesis.pdf
Anglicky: https://archive.org/stream/scienceandhypoth00poinuoft#page/n5/ mode/2up

*Ptolemy's Almagest* (1984).
anglický překlad z latinského překladu řeckého originálu (G.J.Toomer). Četba vhodná jen pro milovníky historie. Pro pochopení Ptolemaiova vlivu je užitečnější číst český výbor studií Zdeňka Horského : *Koperník a České země (2011).*

Zbyněk Šír: *Řecké matematické texty* (2011).
České překlady ukázek z nejslavnějších antických matematiků (Archimedes, Eukleides, Apollónios, etc.) s komentovaným přehledem antické matematiky. Pro českého čtenáře, který chce stavět své matematické znalosti na pevných základech, prakticky nepostradatelná kniha.

Antonín Šíma: *Svět vymezený a neomezený* (2012).
Pěkná česká knížka pro úvod do pythagorejských nauk.

Petr Vopěnka: *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci* (2000).
Velmi obsáhlé rozpravy s geometrií, související s naším tématem, zvláště III. Rozpravy. Kniha sice není tenká, ale vnímavý čtenář ji určitě rád přečte celou a několikrát. Je štěstím, že je v originále napsána česky.

Victor Szebehely: *Theory of Orbits in the Restricted Problem of Three Bodies* (1967).
Prakticky nejpodrobnější „rozumná“ (= ne do hlubokých detailů jdoucí) příručka k problému tří těles. Tuto knihu lze doporučit jako základní četbu pro pokračování v našemu tématu.

Max Jammer: *Concepts of Force* (1999).
Vyvážená ve výběru nejpodstatnějších pramenů; knížka je napsaná „ stručně a jasně “, kdykoliv je člověk v pochybnostech, může se o ni spolehlivě opřít. Je součástí programové ediční kolekce autora, která stojí za přečtení – *Concepts of Mass, Concepts of Space, Concepts of Simultaneity.*

Aristotelés: *Fyzika* (1996).
Pečlivý český překlad Antonína Kříže, navíc opatřený velmi cennými poznámkami překladatele. Spis není jen o „fyzice“ (*fysis* = přirozenost). Pokud by některé pasáže díla působily na čtenáře archaicky, může se pokusit sám pro sebe s nimi polemizovat – pravděpodobně nahlédne, že to není tak snadné. Jako doplněk (samozřejmě i samostatně) lze doporučit kratší knížku Milana Mráze *Smyslové vnímání a čas v Aristotelově filosofii* (2001).

Tomáš Akvinský : *Theologická Summa* (1937-1939).
Vynikající český překlad olomouckých dominikánů z latinského originálu. Obsáhlé dílo o cca 5500 stranách. Pro nepřipraveného čtenáře ovšem velmi obtížné.

**Index:**

Jan Kadrnoška
**Problém tří těles** – komentované praktikum
vydalo sdružení Themis, 28. října 563, Turnov
Obálku navrhla Markéta Šílená
Sazba LaTeX
Vydání první, 2017
Vytiskla Tiskárna Květoslav Zaplatílek, Vesec

ISBN : 978–80–270–0991–6
: 978–80–270–0992–3 (pdf)